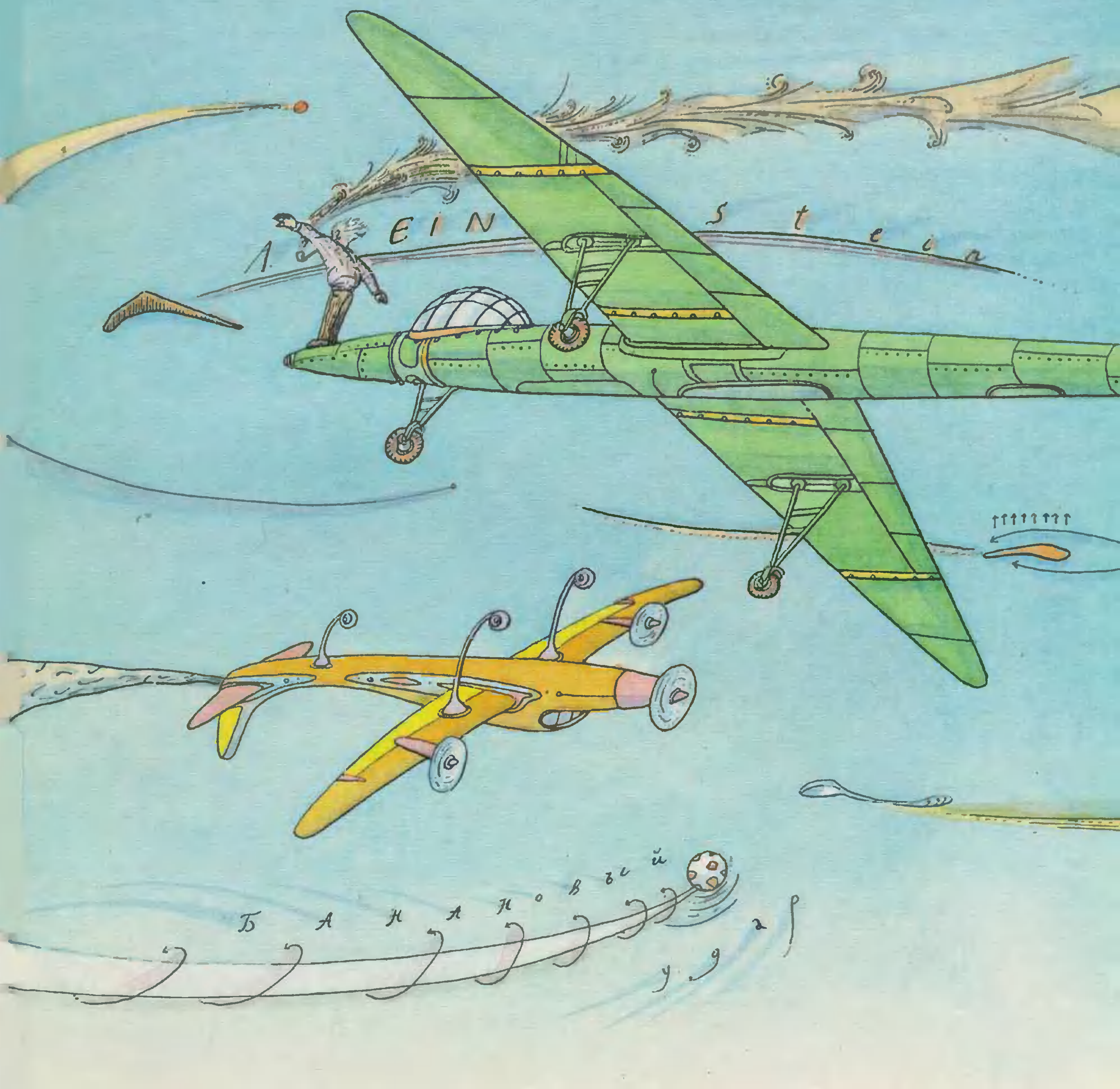
ISSN 0130-2221
СЕНТЯБРЬ/ОКТЯБРЬ 1997 · №5

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

СЕНТЯБРЬ/ОКТЯБРЬ · 1997 · №5

В номере:

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716)

А. КОТОВА

БОЛЬШИНСТВО людей при имени Лейбница немедленно вспоминают Ньютона (и наоборот). Этот стереотип складывается со школы: «формула Ньютона—Лейбница» звучит так же привычно, как «закон Бойля—Мариотта» или, скажем, «Ломоносова—Лавуазье». Поскольку Ньютон и Лейбниц были современниками и почти ровесниками (Ньютон старше всего на 3 года), хочется представить их постоянно поддерживающими научные контакты, советующимися друг с другом, радостно сообщающими друг другу о своих новых идеях, тем более что это было в традициях эпохи... Увы! Два величайших ума второй половины XVII века, работавшие над сходными проблемами и создавшие практически одновременно одни и те же теории — дифференциальное и интегральное исчисления — не только не работали вместе, но яростно оспаривали приоритет друг друга и перессорились смертельно. Настолько, что, когда Лейбниц умер, Лондонское Королевское общество сделало вид, что никакого Лейбница знать не знает, и ни словом не обмолвилось о заслугах немецкого ученого и философа: как соотечественники Ньютона, английские ученые придерживались его точки зрения на авторство в этой области науки...

Эта прискорбная история взаимоотношений двух великих ученых служит предостережением всем любителям отстаивать свой приоритет. Ни одному из них битва за звание первооткрывателя не принесла никакой пользы, только истрепала обоим нервы и подпортила репутацию... А между тем идея дифференциального и интегрального исчисления носилась в воздухе; ее отчаянно не хватало математической науке, и нет ничего удивительного в том, что два умнейших человека эпохи одновременно взялись за эту проблему и с успехом разрешили ее. Кстати, мы пользуемся в этой области в основном обозначениями Лейбница, ибо он, в отличие от своего соперника, построив теорию позже чуть не на 10 лет, опубликовал ее раньше Ньютона. Более того, к моменту выхода из печати первого из опубликованных Ньютоном исследований («Рассуждение о квадратуре кривых») были уже изданы не только подавляющее большинство мемуаров Лейбница, но и многие статьи его учеников Я. и И. Бернулли и даже учебник (!) дифференциального исчисления, написанный Г. Лопиталем.

Готфрид Вильгельм Лейбниц был одним их тех универсальных гениев, которые в те времена встречались довольно часто и которых почти нет теперь. Он был политиком и дипломатом, глубоким философом и натурфилософом (т.е. физиком и математиком). Все знают, что он — один из отцов-основателей математического анализа; но среди слов, введенных Лейбницем в математический обиход, не только «дифференциал» и «функция», но и «координаты» (изобретенные раньше, но не имевшие устоявшегося названия), и «алгоритм» в нынешнем смысле этого слова (до Лейбница алгоритмом называли отнюдь не «рецепт решения» задачи, этот термин относился к десятичной позиционной системе счисления, дошедшей до Европы через труды Аль-Хорезми). Норберт Винер говорил, что, если бы ему предложили выбрать святого — покровителя кибернетики, он выбрал бы Лейбница. Не только создатель весьма совершенной счетной машины, но и один из первых исследователей двоичной системы счисления, и один из первых «математизаторов» логики, Лейбниц, безусловно, замечательно подошел бы на роль, предложенную Винером...

Лейбниц родился в Лейпциге 1 июля 1646 года в семье профессора морали местного университета. Рассказывают, что при крещении младенец поднял голову и широко раскрыл глаза. Легенда утверждает, что это был верный признак будущей выдающейся судьбы; впрочем, подобными легендами окружено рождение и раннее детство многих людей, оказавшихся великими.

Характер ученого, как пишет Бертран Рассел, был, по-видимому, довольно неприятным; хотя Лейбниц несомненно был человеком честным и порядочным, и хотя в своих философских сочинениях он придерживался оптимистической точки зрения, и хотя он мечтал о тех временах, когда вместо того чтобы спорить и ссориться, люди будут садиться за стол, брать в руки перья и говорить: «давайте посчитаем» — и выяснять наверняка, кто прав, — все эти вполне симпатичные черты сочетались с тяжелым характером. Впрочем, почему-то так случается со многими крупными личностями, известными в веках...

Всю жизнь он, как сказали бы теперь, разбрасывался, увлекался то одним, то другим, то несколькими совершенно разными делами одновременно. В школьные годы заинтересовался логикой — в ту пору скучным и во многом схоластическим предметом, от которого обычные школьники впадали в тоску. А он увидел в логике возможность создания «всеобщего алфавита» человеческого мышления. Поступив в Лейпцигский университет (в 1661 г.), серьезно занялся математикой и даже специально ездил на один семестр в Йену (1663 г.), где в то время преподавал известный немецкий математик и философ Э. Вейгель, мечтавший о применении математических принципов к любой области знания, в том числе о построении логики по образу и подобию евклидовых «Начал». Однако вскоре математика отошла на второй план: по возвращении в

Иллюстрация В. Власова

Лейпциг Лейбниц занимается на юридическом отделении. Магистерскую диссертацию он защитил на философском факультете, и эта работа была посвящена логике; называлась она «Диссертация о комбинаторном искусстве» (1666 г.). Но докторскую степень он получил за диссертацию «О запутанных судебных случаях», защищенную в том же году в Альтдорфском университете (относившемся к имперскому городу Нюрнбергу). Ему предложили профессорскую должность в Нюрнберге, но Лейбниц отказался от открывшейся перед ним академической карьеры и поступил на службу к майнцкому курфюрсту. Служба была юридического и дипломатического характера, и Лейбниц окунулся в политику... но не целиком.

Да, он ездил по дипломатическим поручениям; он много работал, упорядочивая законодательство «страны-нанимателя»; он активно занимался публицистикой, обосновывая некоторые политические и дипломатические акции Майнца и своего непосредственного начальника — министра, видного сановника, опытного дипломата барона Бойненбурга; он углубился в богословские вопросы, имевшие самое непосредственное отношение к политике. В те времена Германия представляла собой лоскутное одеяло, россыпь маленьких княжеств, каждое из которых имело свои политические пристрастия, амбиции, свою королевскую (княжескую, герцогскую...) династию с обширными родственными связями по всей Европе и свою религию. Бойненбург стремился — среди прочего — к объединению Германии (не в одну страну, но хотя бы в союз государств с общими целями и интересами), что было невозможно без объединения — или хотя бы примирения — ярых религиозных противников, не только католиков и протестантов, но и протестантов разных течений.

Но в то же время Лейбниц не забывает о науке. Дипломатическая служба привела его в Париж (1672 г.) — он знакомится с учеными, группировавшимися вокруг совсем юной тогда Академии наук, встречается с Гюйгенсом, тогдашним (самым первым) президентом Академии, обсуждает с ним свои первые научные исследования (в теории бесконечных рядов). Ему пришлось съездить в Лондон (1673 г.) — он завязывает отношения с английскими учеными, демонстрирует им еще незавершенную модель своей счетной машины. Англичане отнеслись к нему несколько свысока, сочтя его дилетантом (кем он, собственно, тогда и был), но по предложению тогдашнего ученого секретаря Королевского общества Ольденбурга изобретатель машины был избран членом общества.

Вернувшись в Париж, Лейбниц берется за самообразование, и через три-четыре года никто не посмел бы назвать его дилетантом в науке. В поразительно короткие сроки он изучил достижения современной ему математики (Декарта и его последователей, Кавальери, Паскаля, Гюйгенса, Валлиса, Барроу и многих других) и углубился в самостоятельные исследования. К осени 1675 г. уже были выработаны основные принципы и обозначения дифференциального и интегрального исчисления. Спор о приоритете еще не начался, поскольку ничего еще не было опубликовано, и несколькими письмами Лейбниц и Ньютон обменялись (через Ольденбурга). Несомненно, однако, что теория бесконечно малых у Лейбница уже была к этому моменту в общих чертах готова.

Более того, подход двух великих людей к этой теории был различным. Ньютон был, видимо, больше физиком, чем математиком, по складу ума; его теория строилась в основном с кинематической точки зрения. Теория же Лейбница была в своей основе геометрической. Он мыслил в терминах «характеристического треугольника» со сторонами dx, dy, ds, — так, как мы привыкли представлять себе, вслед за ним, изменение аргумента и функции.

«Сохранившиеся рукописные заметки позволяют точно датировать некоторые этапы его работы. 26 октября (1675 г.) он еще выражает квадратуру по методу неделимых в духе Паскаля словами «все w» (omnia w), где w — ординаты, лишь подразумевая, как и Паскаль, что каждая линия умножается на бесконечно малое приращение абсциссы. Такой записью пользовался перед тем Валлис (1670). Через три дня, 29 октября, Лейбниц замечает, что вместо omn.l полезно писать $\int l$, т.е. сумма линий l; знак $\int$ был взят как первая буква слова summa. Если же дано $\int l = ya$ (множитель a добавлялся, чтобы получалась размерность площади), то возникает другой род исчисления, в котором $l = ya/d$. При этом Лейбниц писал, что, тогда как $\int$ увеличивает число измерений, d его уменьшает, $\int$ обозначает сумму, d — разность. Первой буквой слова «разность» — differentia — и явился знак d. Быть может, потому, что вторая операция понижает размерность, знак d был поставлен первоначально в знаменателе. Но вскоре обнаружилось неудобство такой записи, так как разность абсцисс нередко приходилось писать в знаменателе. В рукописи «Примеры обратного метода касательных» (Metodi tangentium inversae exempla), датированной 11 ноября, менее чем две недели спустя, символы x/d, y/d заменяются на dx, dy, и записи принимают знакомый нам вид. Одновременно со всем этим формулировались на языке и в обозначениях нового алгоритма важнейшие правила операций, например: дифференцирования и интегрирования степенной функции, дифференцирования произведения, вынесения постоянного множителя за знак интеграла, интегрирования суммы», — пишет А.П.Юшкевич в главе «Дифференциальное и интегральное исчисление» книги «История математики» (т.II, «Математика XVII столетия»). Наконец, в 1683 году в журнале «Acta Eruditorum» появился труд «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления», в котором изложены основные начала дифференциального исчисления, содержавший, вслед за определением дифференциала функции, правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и любой постоянной степени. «Заметим, что в этом исчислении обращаются с x и dx так же, как с y и dy или с какой-нибудь другой неопределенной буквой и ее дифференциалом», — говорит Лейбниц; и затем: «Если знать, так сказать, *Алгоритм* этого исчисления, которое я называю *дифференциальным*, то все прочие дифференциальные уравнения смогут быть получены при помощи общего вычислительного приема, и можно будет находить максимумы и минимумы, а также касательные, не испытывая притом необходимости в устранении дробей или иррациональностей или других сложных выражений, как это приходилось, однако, делать, пользуясь доныне обнародованными методами».

Здесь проявилось, между прочим, и общее направление мысли Лейбница о полной алгоритмизации всех наук, разработанное в его учении о «всеобщей характеристике», которая должна была стать единым алгоритмом, основанным на математической логике. Как оказалось впоследствии, мечта о едином всеобщем алгоритме неосуществима; но попытки алгоритмизации науки оказали ей неоценимую услугу, в течение столетий направляя математические исследования в самых различных областях. Среди методов, вызванных к жизни идеей о всеобщей характеристике, немалую роль Лейбниц отводил удобному символическому языку науки, системе обозначений, которая позволяла бы не только удобно записывать математические результаты, но и помогала бы новым исследованиям; «следует заботиться о том, чтобы знаки были удобны для открытий. Это достигается в наибольшей мере тогда, когда знаки коротко выражают и как бы отображают глубочайшую природу вещи, и при этом удивительным образом сокращается работа мышления», — так считал Лейбниц, и судя по тому, что его обозначения прижились в математике и используются уже триста лет, он умел изобретать знаки, удобные для открытий...

Новые дифференциальные и интегральные методы позволили, в частности, сделать и некоторые открытия в теории бесконечных рядов, в том числе получить известный «ряд Лейбница» для разложения арктангенса и выражение для $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

Знак интеграла появился в печати чуть позже знака дифференциала, в сочинении «О глубокой геометрии и анализе неделимых и бесконечных» («Acta Eruditorum», 1686). Здесь же указано, что «у нас суммы и разности или $\int$ и d так же взаимно обратны, как степени и корни в обыкновенном исчислении». В этом же сочинении впервые появился в печати и термин «характеристический треугольник». Интеграл у Лейбница — прежде всего сумма бесконечного числа слагаемых, кстати, автор долгое время и называл его суммой; слово «интеграл» введено было И.Бернулли. Интеграл понимался — в нынешних терминах — как определенный интеграл с переменным верхним пределом, нижний предел в большинстве случаев соответствовал началу координат. Неопределенный интеграл появился гораздо позже, но и о нем Лейбниц упоминает, хотя и между делом, в статье «Подходящее построение задачи о парацентрической изохронной кривой» («Acta Eruditorum», 1694).

Сочинения Лейбница о дифференциальном и интегральном исчислении оказали на современников гораздо большее влияние, чем теория Ньютона, не только из-за того, что раньше были опубликованы, но и по причине существенно более удобных и прозрачных обозначений. Как уже было сказано выше, практически сразу появились последователи нового метода — братья Бернулли и другие. Гораздо позже, уже в XIX в., когда Коши стал излагать анализ в терминах теории пределов, методу Лейбница нашлось естественное и достойное место в новом построении науки.

Но вернемся в эпоху Лейбница...

В конце 1676 г. он поступил на службу к герцогу ганноверскому и больше уже места службы не менял. Его основной обязанностью было заведование герцогской библиотекой в Вольфенбюттеле. Но кроме того он был еще и советником герцога по экономике, финансам, вопросам внешних сношений, народного просвещения и т.д. За время его службы, продолжавшейся до самой смерти философа, сменились три герцога; один из них, Георг Людвиг, ставший к концу жизни Лейбница и английским королем, пожелал, чтобы Лейбниц составил для него историю Гвельфского дома, к которому принадлежала Ганноверская династия.

Свой исторический труд Лейбниц начал «с самого начала» — с теории возникновения и эволюции Земли. Вводная часть к истории, содержавшая эти вопросы, должна была называться «Рассуждение о том древнейшем доисторическом состоянии рассматриваемых областей, которое можно определить по данным природы» «Рассматриваемые области» — это те земли, историю которых предстояло описать. В результате получилось сочинение «Протогея», т.е. «Первоземля» (1691).

Но Лейбниц не был бы Лейбницем, если бы из-за геолого-минералогических и исторических исследований отвлекся от множества других дел, интересовавших его. Юридически-законодательская работа — проекты реформ экономики, как промышленности, так и сельского хозяйства — теологические труды — вопросы общегерманского просвещения — создание научных обществ... Берлинское научное общество обязано своим возникновением проекту Лейбница, ставшего его первым президентом. Попытки организовать такие общества в Дрездене и Вене не увенчались успехом, зато Лейбницу удалось «проездом» (с целью сбора исторических документов) содействовать организации физико-математической Академии в Риме.

Он же стоял и у истоков Российской академии наук: Петр I, будучи в Европе, познакомился с Лейбницем и советовался с ним по поводу организации научных обществ в России, и Лейбниц дал немало рекомендаций и советов, предложил множество технических и экономических проектов. С 1697 года Лейбниц состоял в постоянной переписке с русским правительством и даже был принят на службу в высоком звании тайного юстиц-советника и получал жалованье...

Умер Лейбниц 14 ноября 1716 г. в Ганновере, отравившись лекарством... Последние его годы были омрачены спором с Ньютоном о приоритете; смерть же его прошла почти незамеченной ни в Ганновере, ни в научных обществах, создателем или членом которых он был. Только Парижская академия почтила память великого ученого, отметив его заслуги перед наукой. Но остались многочисленные труды — философские, научные, теологические, и чем дальше, тем яснее становилось потомкам, какое влияние оказал Лейбниц на развитие научной мысли. Впоследствии Дидро в «Энциклопедии» заметил, что для Германии Лейбниц был тем, чем для Древней Греции были Платон, Аристотель и Архимед, вместе взятые.

Автор предлагаемой читателям статьи Джеф Раскин — профессор Калифорнийского университета в Сан-Диего, один из разработчиков комьютера «Macintosh». Он не является ни профессиональным физиком, ни механиком. Тем не менее, статья показалась нам интересным примером того, как неутомимая любознательность и стремление разобраться в явлениях окружающего мира привели автора к необходимости критически изучить колоссальное количество литературных источников, поставить разнообразные простые и остроумные эксперименты и выработать, наконец, свое видение проблемы (хотя и не совсем полное и корректное).

Мы надеемся, что эта статья пробудит у читателей желание провести свои самостоятельные изыскания.

Для знакомства с более последовательными объяснениями физической сущности подъемной силы рекомендуем обратиться, например, к таким книгам: А.Л.Стасенко, «Физика полета» (Библиотечка «Квант», вып.70); С.Э.Хайкин, «Физические основы механики».

Статья перепечатывается (со значительными сокращениями) из журнала «Quantum» (сентябрь/октябрь 1994 г.).

Перевод с английского В.Мещерякова.

Окрыленный эффектом Коанда

Дж.РАСКИН

РАЗУМНОЕ объяснение явления «аэродинамической подъемной силы» было достигнуто в течение двух десятилетий после первого полета братьев Райт (под большим влиянием работы Людвига Прандтля[1]), но в элементарных учебниках и популярных статьях даже сегодня наиболее общее объяснение подъемной силы остается неясным. Приведем типичный пример этого.

Рисунок 1 основывается на материале введения в популярную книгу

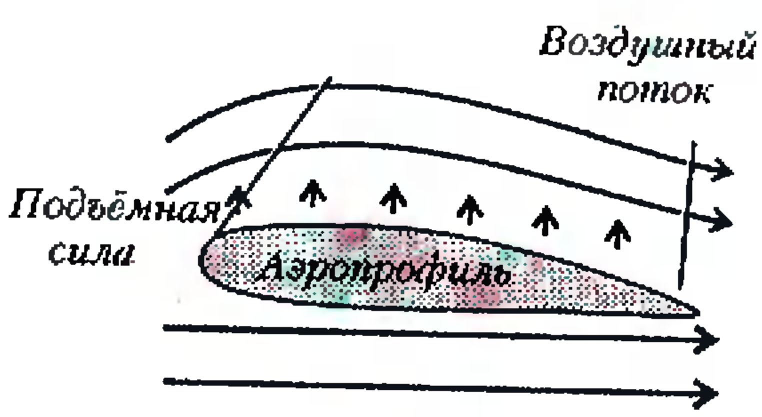


Рис. 1

Д.Макоулея «Особенности работы технических устройств»: «Поперечное сечение крыла имеет форму, называемую аэродинамическим профилем. При движении воздух обтекает крыло. Профиль крыла искривлен так, что поток воздуха, обтекающий крыло сверху, движется быстрее, чем поток воздуха, обтекающий крыло снизу. Быстро движущийся воздух имеет более низкое давление, чем медленно движущийся. Поэтому давление воздуха под крылом более высокое, чем над ним. Эта разность давлений создает силу, которая вынуждает крыло подниматься вверх. Такую силу называют подъемной силой». Данное рассуждение безоговорочно обращается к эффекту Бернулли, который устанавливает, что чем быстрее воздух движется вдоль некоторой поверхности тела, тем ниже его давление на эту поверхность.

Сегодня, когда большинство самолетных крыльев имеет значительно большую кривизну профиля сверху, чем снизу, такому объяснению, казалось бы, можно поверить. Но еще в детстве я обнаружил, что оно сталкивает меня с загадкой: как же тогда самолет может летать верхом вниз (нечто подобное я видел на авиационных шоу)? Когда я пристал с этим вопросом к учителю, он сначала стал отвергать, что самолет может летать перевернутым, а потом попытался продолжить лекцию. Но, когда я, расстроенный, стал доказывать, что такое может быть, он закричал мне: «Заткнитесь, Раскин!». О том, что произошло после этого, я и собираюсь рассказать в этой статье.

Через несколько лет мне удалось уже самостоятельно выполнить некоторые расчеты на основе общепринятого объяснения работы крыла. Используя данные модели самолета, я нашел, что вычисленная подъемная сила составляет только 2% от силы, необходимой для полета модели. Полагая, что уравнение Бернулли является правильным (действительно, оно представляет одну из форм закона сохранения энергии), я столкнулся со второй загадкой: что является основным источником подъемной силы?

Рассмотрим в качестве примера летящий в воздухе вращающийся мяч. Пытаясь разобраться в том, почему искривляется полет мяча и как форма крыла влияет на подъем, мы увидим, как общепринятое объяснение может ввести в заблуждение даже известных ученых.

Вращающийся мяч. Траектория мяча, закрученного вокруг вертикальной оси и движущегося в воздухе, отклоняется вправо или влево от первоначально заданного направления. Опыт показывает, что этот эффект зависит, во-первых, от закрученности мяча и, во-вторых, от наличия среды (воздуха). Незакрученные мячи или закрученные в вакууме движутся по прямой. Но прежде чем продолжить, может вы сами захотите решить, в какую сторону будет отклоняться мяч, закрученный, напри-

[1] *Людвиг Прандтль (1875–1953) — немецкий физик, часто называемый «отцом аэродинамики». Его знаменитая книга по теории крыла была опубликована в 1918г. (Русский перевод под названием «Теория несущего крыла» появился в 1931 г. —* Прим. ред.*)*

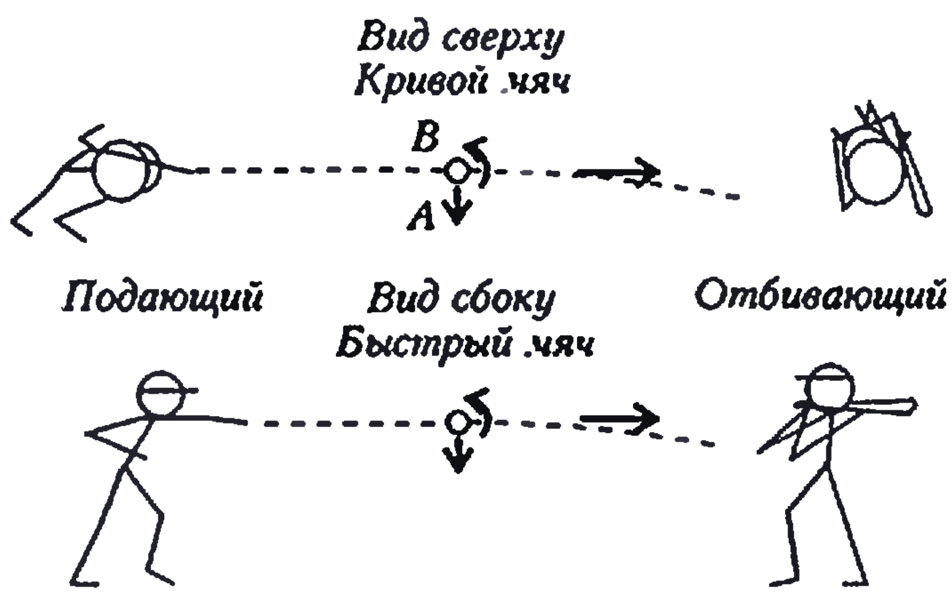


Рис. 2

мер, против часовой стрелки (если смотреть сверху).

Давайте посмотрим, что говорят об этой задаче книги: от тех, которые пишутся физиками и на которые все ссылаются как на авторитетные источники, до тех, которые подобны книге футбольного тренера моего сына, описывающей технику ударов по мячу. Начнем с физика Дж.Трефила, который в книге «Ученый на морском побережье» пишет: «Прежде чем закончить обсуждение эффекта Бернулли, я бы хотел указать на еще одну область, где его следствия должны быть обязательно изучены и которая несколько неожиданно проявляется в бейсболе. Рассмотрим, например, подачу «кривого мяча». Это особый тип подачи, при которой мяч бросают так, что при движении вперед он закручивается вокруг своей оси, как показано на рисунке 2, изображающем вид сверху. Из-за шероховатости поверхности мяча действие вязких сил приводит к возникновению тонкого слоя воздуха, вращающегося вместе с этой поверхностью. Рассматривая рисунок, можно понять, что воздух в точке, обозначенной буквой *A*, будет двигаться быстрее, чем воздух в точке *B*, потому что в первом случае скорость вращательного движения точек поверхности мяча складывается со скоростью мяча вдоль траектории, а во втором — вычитается. В результате этого возникает «подъемная сила», которая стремится переместить мяч в указанном на рисунке направлении».

Трефил затем показывает схему движения «быстрого мяча», отклоняющегося вниз, когда он закручивается так, что нижняя поверхность мяча вращается по направлению его движения. Это то же явление, что и в предыдущем случае, с тем лишь отличием, что ось вращения мяча повернута на 90 градусов.

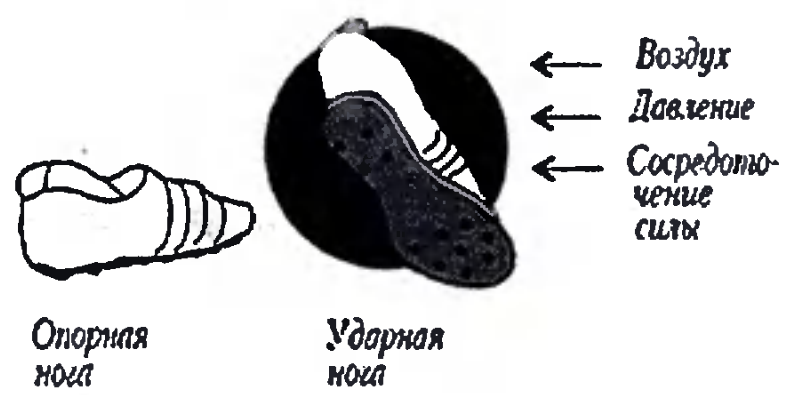
В книге «Физика бейсбола» Р.Адэар рассматривает мяч, брошенный по направлению к месту игрока с битой так, что он вращается против часовой стрелки, как это показано на рисунке Трефила. Направление влево от подающего называется первой базой, вправо от подающего — третьей. Адэар пишет: «Мы можем тогда полагать, что давление воздуха на третьебазовой стороне мяча, которая движется быстрее, будет больше, чем давление на первобазовой стороне, которая движется медленнее. Вследствие чего мяч будет отклоняться в сторону первой базы».

Выводы Адэара и Трефила прямо противоположны, хотя они согласны в том, что сторона мяча, вращающаяся по направлению его перемещения к принимающему игроку, движется быстрее, чем противоположная сторона. Тем не менее, мы усвоили из этих двух источников, что давление воздуха на одной из сторон мяча либо увеличивается, либо уменьшается в зависимости от скорости этой стороны. Но я не буду пока вставать на одну из сторон этого спора.

«Британская энциклопедия» вносит в дискуссию иные рассуждения, основывающиеся на введении концепции вязкого трения: «Трение стороны мяча, поворачивающейся в воздухе в направлении перемещения мяча, замедляет воздушный поток, в то время как на другой стороне трение ускоряет воздушный поток. Большее давление на стороне, где воздушный поток замедлен, толкает мяч в направлении области низкого давления на противоположной стороне мяча, где возникает относительное увеличение потока воздуха».

Ну вот, теперь уже мы выяснили, что вращающийся мяч заставляет воздух двигаться быстрее или медленнее по одну или другую сторону мяча. И еще — что быстро движущийся воздух увеличивает или уменьшает давление в зависимости от вашего выбора, какому авторитетному источнику следовать.

И вновь о книге тренера моего сына. Тренер — всего-навсего футболист международного класса Дж.Лямпти. Он не дает теоретического обоснования, но мы можем быть достаточно уверены, что Лямпти неоднократно проводил опыт с мячом и должен поэтому правильно описывать направление поворота мяча. Он пишет: «Банановый удар является более или менее смещенным от центра мяча энергичным ударом подъемом ноги, который придает вращение футбольному мячу. Удар, смещенный от центра мяча вправо, искривляет траекторию мяча влево. Удар, смещенный от центра мяча влево, искривляет траекторию мяча вправо. В итоге



Мяч искривляет траекторию влево

Рис. 3

изгибы траектории футбольного мяча зависят от скорости вращения». Как вы можете видеть на рисунке 3, Лямпти, подобно Адэару, говорит о высоком давлении на стороне мяча, вращающейся по направлению его полета.

Я не буду касаться других мнений, которые принимают тот или иной способ поворота мяча. Некоторые объяснения зависят от авторской интерпретации эффекта Бернулли, некоторые связаны с вязкостью, некоторые — с трением, некоторые — с турбулентными явлениями в воздухе.

Позже мы вернемся к теме закручивания мячей, а сейчас продолжим обсуждение проблем с общепринятым мнением о подъемной силе.

Другие парадоксы. Традиционное объяснение работы крыла приводит нас к заключению, например, о том, что крыло, которое имеет слегка вогнутый низ (рис.4), будет всегда испытывать, при прочих равных условиях, меньшую подъемную силу по

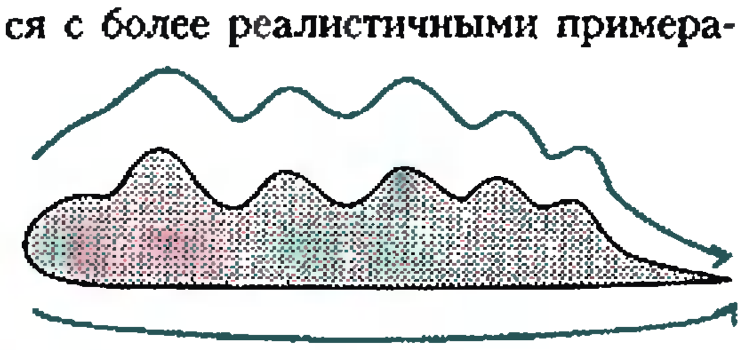
Крыло с вогнутым низом

Рис. 4

сравнению с плоскодонным крылом. Ведь у вогнутого снизу крыла путь воздуха вдоль нижней части профиля длиннее, чем у плоскодонного (на рисунке 1). Поэтому подъемная сила меньше. Правильно? Неправильно!

Кроме того, мы теперь вправе спросить: как тогда плоское крыло, подобное тому, которое имеет бумажный планер, без каких бы то ни было искривлений может обеспечить подъемную силу? Заметим, что плоское крыло расположено под углом к направлению движения планера. Этот наклон называется «углом атаки» и является необходимым для создания подъемной силы плоского крыла. Позже мы вернемся к этой теме.

Формы поперечных сечений авиационных крыльев называются «аэродинамическими профилями». Очень эффективным профилем крыла для небольших медленно летающих моделей является кусок какого-либо листового материала, изогнутый в виде арки. Однако из общепринятого объяснения вообще не ясно, как такое крыло, у которого верх и низ профиля имеют одинаковые длины, может создавать хоть какую-нибудь подъемную силу. Если бы общепринятый взгляд был корректным, мы должны были бы делать верх крыльев даже более криволинейным по сравнению с тем, как его делают сегодня. В этом случае воздух двигался бы еще быстрее, и мы получили бы еще большую подъемную силу. На рисунке 5 волнистость крыла сильно преувеличена (ниже мы встретимся с более реалистичными примерами). Если мы сделаем верхнюю поверхность крыла подобно тому, как показано на рисунке 5, то воздух будет двигаться вдоль нее быстрее (так как воздух проходит больший путь), чем в случае крыла обычного типа. Возможно, вы придете к заключению, что такой вид профиля должен иметь избыток подъемной силы. В действительности же он может привести к катастрофе.



Волнообразное крыло

Рис. 5

Достаточно примеров. Несмотря на то, что уравнение Бернулли является правильным, его применение к решению вопросов об аэродинамической подъемной силе вносит значительную путаницу в выводы, основанные на использовании общепринятых представлений. Правильно примененное или нет, это уравнение предлагает не очень удобный образ того, что связывает форму профиля крыла с его подъемной силой, и ничего не говорит о силе вязкого трения. Эта трудность, объединенная с повсеместным существованием правдоподобно звучащего общепринятого мнения, вероятно объясняет, почему даже некоторые превосходные физики были введены в заблуждение.

Крыло Эйнштейна. Мой друг Йессо, который работает в авиационной промышленности, выступил с предложением улучшить профиль крыла. Рассуждая в рамках обычных представлений, он предложил добиться большей подъемной силы переделкой верхней части профиля способом, показанным на рисунке 6. Это глыбообразное крыло и есть как раз «разумная» версия волнистого профиля, который был рассмотрен ранее. Идея Йессо была, конечно, основана на концепции, что более длинная верхняя поверхность могла бы давать большую подъемную силу. Когда я был готов сказать Йессо, почему его замысел не будет работать, мне посчастливилось поговорить с Е.Скофом, который разрабатывал авиационные проекты для фирмы «Сааб» в Швеции. Он рассказал мне о горбатом профиле крыла (рис.7), спроектированном Альбертом Эйнштейном во время Первой мировой войны. Обоснование такого профиля было тем же самым, что и рассуждения, которые использовал Йессо. Но это крыло не имело аэродинамических преимуществ. Вместо того чтобы убежать Йессо в бесперспективности его затеи, я сказал, что он придумал модернизированную версию эйнштейновской ошибки! (Эйнштейн впоследствии заметил с огорчением, что он оказался бестолковым.)[2]

Глыбообразное крыло

Рис. 6

Профиль крыла Альберта Эйнштейна

Рис. 7

Эксперименты. Если это аргумент, что профили крыльев создают подъемную силу исключительно потому, что поток воздуха у поверхности понижает давление на эту поверхность, то при искривлении поверхности не имеет значения, является ли она прямой, вогнутой или выпуклой. Общепринятое объяснение дает зависимость только от скорости потока, параллельного поверхности. Есть несколько опытов, которые вы можете легко воспроизвести для проверки этого утверждения.

Опыт 1. Возьмите полоску писчей бумаги размером приблизительно 5×25 см. Держите ее перед губами так, чтобы она высовывалась из пальцев и обвисала, делая верхнюю поверхность выпуклой. Когда вы подуете поверх бумаги, она поднимется (рис.8,*а*). Много книг приписывают этот эффект понижению воздушного давления наверху из-за эффекта Бернулли. Теперь с помощью пальцев

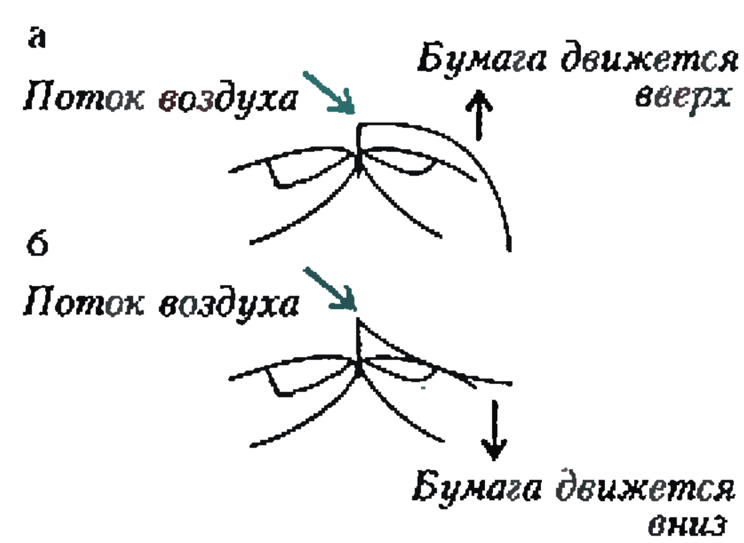


Рис. 8

[2] *Е.Скоф пишет: «В течение Первой мировой войны Альберт Эйнштейн временно работал в LVG (Luft-Verkehrs-Gesellschaft) в качестве консультанта. В LVG он спроектировал профиль крыла с резко выраженным горбом в середине хорды профиля — новшество, предназначенное увеличить подъемную силу. Крыло было тестировано в Гёттингенской аэродинамической трубе, а также на реальном самолете, и в обоих случаях было установлено, что оно не оправдывает возлагавшихся на него надежд. В 1954 г. Эйнштейн писал: «Хотя это, вероятно, правда, что первооснова полета может быть наиболее просто объяснена этим способом [по Бернулли], однако совсем не умно конструировать крыло в такой манере!».*

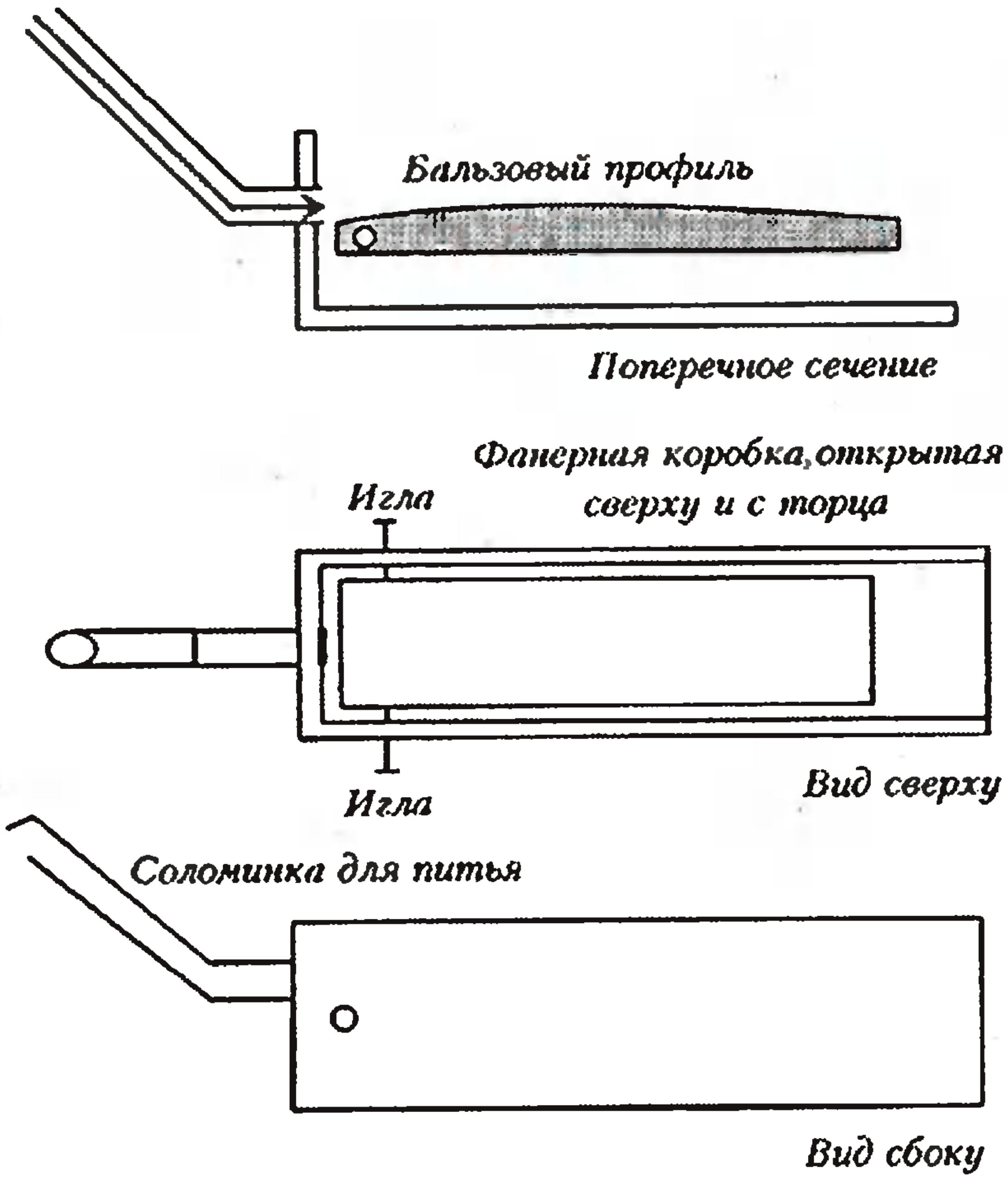


Рис. 9

Рис. 10

придайте бумаге форму кривой так, чтобы ее верхняя поверхность стала слегка вогнутой вдоль всей длины, и вновь подуйте поверх полоски. Бумага теперь движется вниз (рис.8,*б*).

Опыт 2. Обращаясь к рисунку 9, сделайте коробку из тонкой фанеры или картона с помещенным внутрь бальзовым крылом, удерживаемым парой игл, которые позволяют ему свободно откидываться вверх или вниз, а воздух вводится через соломинку для питья. Одна из приятных особенностей в науке та, что вы можете не принимать чье-либо слово за истину в последней инстанции. Вы можете проверить его сами![3] В этой аэродинамической трубе воздух протекает только поверх модели. Я сделал другую, в которой пылесос дует вдоль верхней и нижней поверхностей крыла, и получил те же результаты; но сооружение такой конструкции требует большего усилия, а модели крыла нуждаются в повышенном качестве передней и задней кромок. В связи с этим я пытался убедить компанию, которая изготовляет научное демонстрационное оборудование, включить этот прибор в их предложения. Но они оказались не заинтересованными, потому что «он не дает правильных результатов». «Тогда как он работает?» — спросил я. «Не знаю», — ответил главный конструктор. Эксперимент может быть трудным в интерпретации, но, если нет мошенничества, он не может давать неправильных результатов.

Когда воздух начинает продуваться через соломинку, крыло со стандартным профилем (рис.10) немедленно отрывается от дна коробки и поднимается. Когда продувка прекращается, крыло падает вниз. Это и есть то, что все ожидают. Теперь рассмотрим вогнутую форму. Форма кривой здесь та же самая, как у первого крыла, хотя обращена выпуклостью вниз. Если общепринятое объяснение было бы верным, тогда надо было бы ожидать, что это крыло тоже поднимется, так как длина кривой та же самая, как и в «стандартном» примере. В любом случае воздушный поток вдоль поверхности должен иметь пониженное давление, приводящее к появлению подъемной силы. Однако вогнутое крыло остается неподвижным внизу. Если вы поставите прибор вертикально, то увидите, что крыло будет двигаться прочь от воздушного потока.

Другими словами, часто цитируемый опыт, который обычно используется как демонстрация общепринятого объяснения подъемной силы, не годится на роль демонстрации — какой-то другой эффект оказывается гораздо сильнее. Для остальных профилей (см. рис.10), ради забавы, попытайтесь предугадать направление движения каждого, прежде чем вы поставите их в прибор. Дж.Глейк как-то заметил, что «прогресс в науке происходит тогда, когда опыты противоречат теории». Хотя наука в нашем случае давно известна и опыт противоречит не аэродинамической теории, а часто преподаваемому общепринятому мнению, тем не менее, даже если наука не прогрессирует, прогрессировать может индивидуальное понимание.

Еще один простой опыт приведет нас к лучшему пониманию аэродинамических эффектов.

Эффект Коанда. Если струя воды течет вдоль поверхности твердого

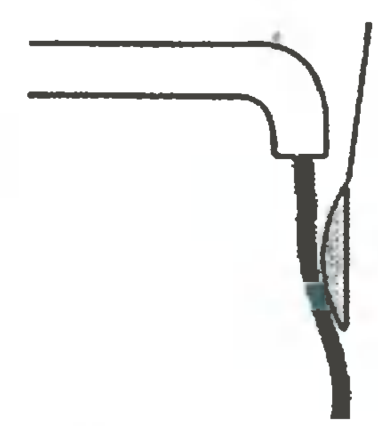


Рис. 11

тела, которая слегка искривлена в сторону струи, вода имеет тенденцию следовать этой поверхности. Это одно из проявлений эффекта Коанда[4], которое легко демонстрируется,

[3] *В некоторых областях, например в изучении субатомных частиц, вам могут потребоваться миллионы долларов и штат из тысяч сотрудников для построения ускорителя, чтобы сделать независимую проверку, но указанная особенность тем не менее остается.*

[4] *В 1930-х годах аэродинамик из Рима Генри Мари Коанда (1885 – 1972) наблюдал, что поток воздуха (или другого газа или жидкости), выходящий из сопла, имеет тенденцию следовать вдоль искривленной или плоской поверхности, если кривизна или угол, который поверхность образует с потоком, не являются слишком резкими.*

например, с помощью ложки и тонкой струйки воды из водопроводного крана (рис.11). Если держать ложку так, чтобы она могла качаться, и приблизить ее к струе, то можно почувствовать, как ложка дернется по направлению к потоку воды. Это — проявление третьего закона Ньютона: если ложка притягивает струю, то и струя должна притягивать ложку.

Эффект имеет границы. Если вы используете сферу вместо ложки, то обнаружите, что вода будет следовать только части пути. К тому же, если поверхность резко искривлена, вода не будет следовать ей, а будет только немного изгибаться и сразу же отрываться от поверхности.

Качественное представление подъемной силы. Описанные ранее эксперименты с миниатюрной аэродинамической трубой без труда объясняются с точки зрения эффекта Коанда: изогнутое вниз крыло (со стандартным профилем) увлекало воздушной поток вниз, следовательно, по третьему закону Ньютона, на крыло со стороны воздуха действовала сила противодействия, направленная вверх. Изогнутое вверх крыло (с вогнутым профилем) увлекало воздушный поток вверх, и результатом была сила, направленная вниз. Эффект Коанда помогает нам мысленно вообразить, почему угол атаки (крыла с равным наклоном во всю длину) является решающе важным; почему самолеты могут летать перевернутыми; почему «действуют» плоское и тонкое крылья; почему опыт 1 с выпуклой и вогнутой полосками бумаги показывает то, что можно было увидеть своими глазами.

Все, что было до сих пор представлено, никоим образом не является завершенным объяснением подъемной силы, а лишь указывает путь к установлению полезной картины явления. Воспользуемся этим путем для разумного рассмотрения проблемы вращающегося мяча.

Почему искривляется траектория вращающегося мяча. Посмотрим по-другому на рисунок 2. Эффект Коанда говорит нам, что воздух увлекается поверхностью мяча. Рассмотрим сторону A, которая вращается в направлении полета, причем сделаем это в системе отчета, в которой мяч неподвижен, а воздух движется и обтекает мяч. Сторона A стремится увлечь воздух своим вращением. Это действие противопоставлено надвигающемуся воздуху. Поэтому увлечение воздуха вокруг мяча на этой стороне должно сначала замедлять надвигающийся воздух и затем ускорять его в противоположном направлении. На стороне B, которая вращается в направлении, противоположном полету, воздух уже движется (относительно мяча) в направлении надвигающегося воздуха и поэтому более легко увлекаем. Воздух с большей готовностью следует изгибу около B-стороны и приобретает скорость в направлении A-стороны. Поэтому мяч движется в направлении B-стороны противодействием со стороны воздуха.

Самое время вновь обратиться к простому опыту. Затруднительно экспериментировать с бейсбольными мячами, потому что их сила тяжести велика в сравнении с аэродинамическими силами, действующими на них, и очень трудно контролировать величину угловой скорости и направление вращения. Поэтому рассмотрим случай, где аэродинамические эффекты легче увидеть. Возьмем дешевый надувной пляжный мяч (дорогой мяч сделан из более тяжелого материала и хуже показывает аэродинамические эффекты). Брошенный с достаточным вращением (низ мяча движется вперед), такой мяч взмывает вверх по кривой по мере продвижения вперед. Подъемная сила благодаря вращению может быть настолько сильной, что оказывается больше, чем направленная вниз гравитационная сила! Вскоре сопротивление воздуха останавливает и вращение мяча, и его движение вперед, и он падает, но не раньше, чем продемонстрирует, что объяснение Трефила, как вращение влияет на полет мяча, является неправильным.

Появление подъемной силы, возникающей благодаря вращению тела во время движения в воздухе, обычно называют эффектом Магнуса[5]. Некоторые книги обсуждают «ротор Флеттнера», который является давно заброшенной попыткой использовать эффект Магнуса для разработки эффективного корабельного паруса. (Флеттнер предлагал заменить паруса на судах парой вращающихся вертикальных цилиндров, развивающих, при наличии ветра, боковую силу тяги.) Помимо Трефила, многие авторы получают эффект в обратном направлении, хотя работы университетского уровня обычно получают его правильно.

* * *

Это был шок осознать, что мой учитель и даже библиотечные книги могут быть неправы. И это было откровение, что я мог верить собственным размышлениям перед лицом такой «концентрированной» оппозиции. Игра с моделями самолетов позволила мне сделать огромный шаг в направлении к интеллектуальной независимости и духа новаторства, что позже в зрелом возрасте привело меня к созданию проекта компьютера «Macintosh» и другим изобретениям.

[5] *Г. Магнус (1802—1870) — немецкий физик и химик, демонстрировавший этот эффект в 1853 г.*

Иллюстрация П. Чернуского

О логичных и нелогичных турнирах

А. ЗАСЛАВСКИЙ

История спортивных состязаний, судя по всему, насчитывает ненамного меньше времени, чем история человечества. Очевидно, что уже много веков назад люди стали выяснять, кто самый быстрый, самый сильный и т.д. На некоторые из этих вопросов ответ получить нетрудно. Например, чтобы понять, кто быстрее бегает, достаточно провести один забег с участием всех претендентов. Значительно сложнее определить сильнейшего из многих участников, если одновременно принять участие в состязании могут лишь двое из них, как в борьбе, шахматах или спортивных играх. Принято считать, что наиболее объективной является так называемая круговая система, при которой каждый участник встречается с каждым и сильнейшим объявляется тот, кто набрал наибольшее число очков или одержавший наибольшее число побед (в турнире без ничьих). По такой системе определяются, например, чемпионы европейских стран по футболу. Правда, ныне чаще применяют олимпийскую систему (проигравший выбывает), но это вызвано не сомнениями в объективности круговых турниров, а большей трудоемкостью их проведения. Попробуем оценить достоинства и недостатки круговой системы.

Предположим, что четыре шахматиста провели однокруговой турнир, который принес следующие результаты:

	1	2	3	4
1	–	1	1	0
2	0	–	1/2	1
3	0	1/2	–	1
4	1	0	0	–

Казалось бы, первый участник является сильнейшим, а последний слабейшим. Однако результат их личной встречи позволяет предположить, что четвертый шахматист играет сильнее первого. Таким образом, информация, сообщаемая таблицей турнира, является противоречивой.

Попробуем разобраться в причинах этой противоречивости. Рассмотрим участников турнира с номерами 1, 2, 4 (или 1, 3, 4). Результаты встреч второго участника говорят о том, что он сильнее четвертого, но слабее первого. Тем самым, первый участник должен играть лучше четвертого и, следовательно, выигрывать у него. Поскольку в действительности этого не происходит, рассмотренную тройку участников следует признать нелогичной (в математике обычно такие тройки называются нетранзитивными). Итак, противоречивость нашего турнира вызвана тем, что он содержит две нетранзитивные тройки (две другие тройки, очевидно, являются вполне логичными).

Теперь естественно сделать следующий шаг и определить степень нелогичности турнира как число его нетранзитивных троек. В частности, степень нелогичности рассмотренного турнира равна 2. Однако число различных троек быстро возрастает с ростом числа участников турнира (при n участниках оно равно $n(n-1)(n-2)/6$, поэтому возникает вопрос, существует ли способ вычисления степени нелогичности турнира более простой, чем перебор всех возможных троек. Решением этого вопроса мы сейчас и займемся.

Рассмотрим сначала турнир без ничьих (например, баскетбольный), в котором за победу присуждается 1 очко, а за поражение — 0 очков. В этом случае формула для определения числа нетранзитивных троек хорошо известна:

$$NT = n(n-1)(2n-1)/12 - \Sigma s_i^2/2, \quad (1)$$

где NT — число нетранзитивных троек, n — число участников турнира, s_i — количество очков, набранных i-м участником.

Доказательство. Пусть все партии, кроме партии участников с номерами 1 и 2, сыграны. Очевидно, что результат последней партии влияет на транзитивность только тех троек, в которые входят оба ее участника. Пусть в партиях с остальными участниками 1 и 2 набрали соответственно s_1 и s_2 очков, причем число участников, у которых они оба выиграли, равно x_{11}, число участников, у которых 1 выиграл, а 2 проиграл — x_{12}, 2 выиграл, а 1 проиграл — x_{21}, оба проиграли — x_{22}. Ясно, что выполняются такие соотношения:

$$x_{11} + x_{12} = s_1,$$
$$x_{11} + x_{21} = s_2,$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = n-2.$$

Эти соотношения показывают, что если s_1 и s_2 известны, то, зная одно из чисел x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, можно определить остальные. В частности, $x_{12} = n - 2 - s_2 - x_{22}$, $x_{21} = n - 2 - s_1 - x_{22}$.

Рассмотрим теперь различные исходы последней партии.

1) *Победа игрока 1*. В этом случае 1 набирает $s_1 + 1$ очко, у 2 остается s_2. Правая часть формулы (1) принимает вид

$$C_1 - (s_1+1)^2/2 - s_2^2/2,$$

где C_1 — полусумма квадратов очков остальных участников, не зависящая от исхода последней партии.

Тройка с участием 1 и 2 будет нетранзитивной тогда и только тогда, когда третий ее участник выигрывает у 1 и проигрывает 2. Поскольку число таких троек равно x_{21}, левую часть формулы можно записать в виде $C_2 + x_{21}$, где C_2 не зависит от исхода партии.

2) *Победа игрока 2*. Рассуждая аналогично, получаем для правой части (1)

$$C_1 - (s_2+1)^2/2 - s_1^2/2,$$

а для левой $C_2 + x_{12}$.

Используя найденные ранее выражения для x_{12}, x_{21}, получаем, что разность левой и правой части в обоих случаях равна

$$C_2 - C_1 + s_1^2/2 + s_2^2/2 + 1/2 + n - 2 - x_{22}.$$

Таким образом, эта разность не зависит от результата произвольной партии, и, значит, одинакова для всех турниров. Рассмотрим теперь турнир, в котором первый участник выиграл у всех остальных, второй — у всех, кроме первого, и т.д. Для этого турнира число нетранзитивных троек равно нулю, а количества очков $s_1 = n - 1$, $s_2 = n - 2$, ..., $s_n = 0$. Используя формулу суммы квадратов натурального ряда, убеждаемся, что формула (1) для этого турнира верна. Следовательно, она верна для всех турниров.

Упражнение 1. Докажите, что максимальное число нетранзитивных троек равно $(n^3-n)/24$ при нечетном n и $(n^3-4n)/24$ при четном.

Прежде чем переходить к турнирам с ничьими, обратим внимание на одно обстоятельство. Может возникнуть вопрос, почему нелогичность турнира следует измерять именно числом нетранзитивных троек, а не циклов другой длины (циклом длины k называются такие k участников, что первый из них выиграл у второго, второй у третьего, ..., k-й у первого). Аргументировать выбор такой меры можно так: во-первых, нелогичность нетранзитивной тройки представляется более очевидной, чем нелогичность длинного цикла, во-вторых, длинные циклы в определенном смысле порождаются нетранзитивными тройками. Точнее, выполняется следующее утверждение: *если в турнире есть цикл длины k, то найдется не менее чем $k - 2$ нетранзитивные тройки.*

Упражнение 2. Докажите это.

Теперь попробуем обобщить формулу (1) на случай турниров с ничьими. Прежде всего заметим, что знать количество очков, набранных каждым участником, явно недостаточно. Действительно, рассмотрим два турнира с $n = 3$ и такими таблицами:

–	1	0		–	1/2	1/2
0	–	1		1/2	–	1/2
1	0	–		1/2	1/2	–

Количества набранных участниками очков в этих турнирах совпадают, но в первой тройке транзитивность нарушена, а во второй — нет.

Поэтому будем считать, что для каждого участника нам известно не только количество набранных очков, но и количество выигрышей, ничьих и поражений, соответственно v_i, n_i, p_i. Разумеется, $v_i + n_i + p_i = n - 1$ для любого i.

Теперь необходимо уточнить понятие степени нелогичности. Действительно, в отличие от турнира без ничьих, в турнире с ничьими возможны три типа нетранзитивных троек, а именно:

–	1	0		–	1	1/2
0	–	1		0	–	1
1	0	–		1/2	0	–

–	1/2	1
1/2	–	1/2
0	1/2	–

Считать вклад всех этих троек в общую нелогичность одинаковым вряд ли разумно. Первая тройка представляется наиболее нетранзитивной, а третья — наименее. Поэтому имеет смысл приписать тройкам первого типа вес 1, второго x, третьего y, где $y \le x \le 1$. Выбор этих весов может диктоваться различными соображениями, но оказывается, что степень нелогичности выражается через v_i, n_i, p_i лишь в одном случае. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим две пары турниров:

1)
$$\begin{array}{ccccc} - & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & - & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & - & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & - & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & - \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} - & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & - & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & - & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & - & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & - \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{ccccc} - & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & - & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & - & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & - & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & - \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} - & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & - & 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & - & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & - & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & - \end{array}$$

В обеих парах числа v_i, n_i, p_i совпадают для всех i. Непосредственно перебрав все тройки и приравняв для каждой пары суммарные нетранзитивности, получим:

$$\begin{cases} 1+9y = 3x+6y, \\ 1+2x+3y = 4x+3y. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x = 1/2$, $y = 1/6$.

Осталось выяснить, существует ли при таких весах формула, аналогичная (1). Ответ на этот вопрос положительный. Приведем результат:

$$NT = \left(\left(n^3 - n\right) - \sum n(n_i + 2) - 3\sum (v_i - p_i)^2\right) \Big/ 24. \quad (2)$$

Доказательство. Вновь предположим, что все партии турнира, кроме партии между участниками с номерами 1 и 2, уже сыграны. Пусть v_1, n_1, p_1, v_2, n_2, p_2 — число выигрышей, ничьих и проигрышей каждого из двух игроков без учета партии между ними, а результаты остальных участников в партиях с ними задаются таблицей

$$\begin{array}{cccc} 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 1/2 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & x_{31} & x_{32} & x_{33}\ . \end{array}$$

где x_{11} — количество участников, у которых и первый и второй игрок выиграли, x_{12} — количество участников, у которых первый игрок выиграл, а второй сыграл вничью и т.д.

Упражнение 3. Выведите соотношение между числами x_{ij}, v_i, n_i, p_i.

Полученные соотношения показывают, что при заданных v_i, n_i, p_i лишь часть x_{ij} можно выбирать произвольно. Например, если известны x_{11}, x_{13}, x_{31}, x_{33}, остальные числа в таблице определяются однозначно.

Упражнение 4. Выразите все x_{ij} через x_{11}, x_{13}, x_{31}, x_{33}.

Теперь можно приступать к доказательству (2). Рассмотрим три возможных исхода последней партии: победа 1, победа 2, ничья.

Упражнение 5. Получите выражения для левой и правой частей формулы (2) в каждом из трех случаев.

Упражнение 6. Используя результаты упражнений 4 и 5, покажите, что разность левой и правой частей (2) во всех трех случаях одна и та же.

Из результатов упражнения 6 следует, что разность левой и правой частей постоянна для всех турниров. Для завершения доказательства можно было бы рассмотреть какой-нибудь конкретный турнир. Но поскольку у нас уже есть формула (1), можно поступить проще.

Упражнение 7. Докажите, что при $n_i = 0$ для всех i (2) переходит в (1).

Из упражнения 7 следует, что для турниров без ничьих формула (2) верна. Следовательно, она верна для всех турниров.

Исследовав формулу (2), можно увидеть, что максимальная нетранзитивность для турнира без ничьих такая же, как для турнира с ничьими. При нечетном n она достигается, если при всех i имеем $n_i = 0$, $v_i = p_i = (n-1)/2$, при четном, если при всех i либо $n_i = 0$, $v_i - p_i = \pm 1$, либо $n_i = 1$, $v_i + p_i + (n-2)/2$. Рассмотренный в начале статьи турнир четырех участников, очевидно, удовлетворяет этим условиям и, следовательно, является максимально нелогичным.

В заключение — несколько слов о «практической» значимости приведенных результатов. Конечно, измерять противоречивость спортивных турниров никому не нужно. Однако есть область прикладной математики, где подобные рассмотренным результаты используются. Это — теория экспертных оценок. Во многих прикладных задачах нередко требуется выбрать наилучший объект из некоторой совокупности, причем выбор является неформализованным и может быть осуществлен только с помощью экспертов. Опыт показывает, что эксперту легче ответить на вопрос, какой из двух объектов является лучшим, чем сравнивать сразу несколько объектов. Поэтому, когда число сравниваемых объектов не очень велико, целесообразно пользоваться так называемым методом парных сравнений, при котором эксперту предъявляются все пары возможных объектов и его ответы заносятся в таблицу типа турнирной. При этом эксперту может разрешаться или не разрешаться объявлять объекты равноценными, что соответствует турнирам без ничьих и с ничьими. Чтобы на основании ответов эксперта можно было сделать обоснованный выбор, необходимо, чтобы они были достаточно логичны. Для проверки логичности и используется формула (1), которую можно найти в большинстве книг по методу парных сравнений. Как правило, при проведении экспертиз опрашиваются несколько экспертов, после чего определяется коллективное мнение. В методе парных сравнений эксперты, у которых число нетранзитивных троек превышает некоторое критическое значение, исключаются из рассмотрения, а мнения остальных учитываются с различными весами (предполагается, что большое число нетранзитивных троек свидетельствует о невысокой компетентности эксперта и, следовательно, его мнение имеет небольшой вес). Применяется ли для сравнений с ничьими формула (2), мне неизвестно. Впрочем, следует отметить ее искусственность, связанную с выбором весов для троек разных типов. Действительно, то, что нетранзитивность тройки второго типа вдвое меньше, чем первого, представляется достаточно разумным, но почему тройка третьего типа должна иметь нетранзитивность $1/6$, остается малопонятным. Если удастся найти доводы в пользу такого веса, ценность формулы (2) значительно возрастет.

Известный физик-теоретик Виктор Фредерик Вайскопф родился в 1908 году в Австрии. После окончания школы и Гёттингенского университета в 1931 году он поступил работать в Копенгагенский университет, затем несколько лет работал в Германии, а в 1937 году переехал в США. Он сделал немало интересных работ в соавторстве с Паули, посвященных элементарным частицам; например, в 1934 году показал возможность построения теории скалярного поля. В 1936 году построил теорию и дал расчеты эффекта поляризации вакуума. Наряду с Бете и Ландау является создателем статистической теории ядра. Развил теорию ядерных реакций. Во время войны он принимал участие в работах по созданию атомной бомбы в США, а после окончания войны продолжил свои работы по физике частиц и атомного ядра; так, в 1954 году разработал оптическую модель ядра.

Вайскопф всегда был сторонником самого широкого сотрудничества ученых всего мира. В 1957 году он впервые попадает в ЦЕРН — Европейский центр ядерных исследований — как приглашенный профессор и год работает там в теоретическом отделе. В 1960 году он входит в директорат ЦЕРНа, а через год становится генеральным директором этого главного международного центра физики элементарных частиц и атомного ядра. При его непосредственном участии было начато сооружение ускорителя на встречных пучках. Интересно, что этот ускоритель уже не помещался на первоначальной территории ЦЕРНа в Швейцарии — пришлось «прирезать» землю в соседней Франции, и ускоритель стал первым, расположенным в двух странах. Частицы в нем пресекали границу по многу тысяч раз в секунду.

Кроме активной исследовательской работы, Виктор Вайскопф на протяжении всей жизни часто выступал с лекциями по философским и социальным проблемам науки, а также с популярными лекциями, опубликовал много книг на эти темы.

Предлагаем вниманию наших читателей размышления В.Вайскопфа о судьбах физики нашего столетия.

Victor F. Weisskopf
20 Bartlett Terrace
Newton Centre, MA 02159

May 5 1997

Dear readers,

I am glad to see that you are interested in the history of nuclear physics. It is a most fascinating development. I hope that you also will contribute to nuclear physics and help to develop this field of knowledge further.

With my best wishes

Yours

Victor F. Weisskopf

Дорогие читатели!

Я рад, что вас заинтересовала история ядерной физики. Это-самая увлекательная область науки. Я надеюсь, что вы тоже внесете вклад в ее развитие, чтобы двигать эту область науки дальше.

С наилучшими пожеланиями
Ваш Виктор Ф.Вайскопф

Наука в двадцатом веке

В.ВАЙСКОПФ

Моя жизнь в науке началась в 1928 году, когда я приехал в Гёттинген аспирантом. Моим руководителем был Макс Борн. За шестьдесят шесть лет научной деятельности я был свидетелем колоссального прогресса науки — она просто поменяла свой лик и характер, но неизменной осталась страсть к исследованию Природы.

Я расскажу о том, что происходило в физике и астрономии, просто потому что я в них лучше разбираюсь. Мне кажется естественным выделить три части в рассказе: первая — от начала века до начала Второй мировой войны, вторая — от конца войны до 1970 года, третья — от 1970 года до конца века. Конечно, деление это условно, поскольку развитие науки идет непрерывно, но выделенные мной границы характерны прежде всего резкой сменой основных научных направлений.

Часть 1 (1900 — 1939)

Решающими событиями для начала первого периода стали идеи теории относительности и квантовой механики. Редко в истории науки встретишь идеи, столь существенно повлиявшие на науку в целом. Однако между двумя этими достижениями есть важное различие.

Теория относительности как бы венчает собой развитие классической физики в восемнадцатом и девятнадцатом веках. Специальная теория относительности объединила механику и электромагнетизм. До нее две эти области не состыковывались, когда речь шла о быстро движущихся зарядах. Конечно, теория относительности породила новые вопросы и проблемы, такие как относительность одновременности, соотношение между массой и энергией, идею о связи гравитации и кривизны пространства. Но по сути своей — это консервативная теория, основанная на понятиях классической физики, таких как координата, импульс, скорость, энергия.

Квантовая механика — действительно революционная идея. Она основана на том, что классические законы в микромире не действуют. Были созданы новые пути и методы для работы. Соотношение неопределенностей Гейзенберга ставит границы применимости классических законов, поэтому лучше называть его «ограничивающим соотношением». (Теорию относительности предпочтительнее было бы называть «абсолютной теорией», поскольку она описывает законы Природы независимо от системы отсчета. Тогда можно было бы избежать большого количества философских диспутов и недоразумений.)

Четверть века потребовалась, чтобы создать нерелятивистскую квантовую механику (т.е. действующую при скоростях меньших скорости света). Но едва возникнув, она положила начало лавинообразному процессу возникновения новых принципов и целых отраслей знания. Всего за несколько лет стали в принципе понятны большинство атомных и молекулярных явлений. Стоит вспомнить слегка перефразированное известное высказывание Уинстона Черчилля в честь Королевских воздушных сил: «Никогда еще столь малым количеством людей не было сделано так много за столь короткое время».

Несколько лет спустя неожиданный результат дало объединение квантовой механики и теории относительности. П.Дирак вывел свое уравнение, которое естественным следствием содержало спин электрона и тонкую структуру спектральных линий. Применение квантовой механики к электродинамике породило квантовую электродинамику с целым рядом удивительных последствий — как положительных, так и отрицательных.

К положительным относится предсказание Дираком античастицы для электрона — позитрона, который был найден позднее, в 1932 году, К.Андерсоном. Наиболее удивительным было предсказание рождения пар частиц-античастиц из излучения и аннигиляция таких пар с излучением фотонов или других переносчиков энергии. Еще одно предсказание — поляризация вакуума в сильных полях. Все предсказанные явления были позднее обнаружены экспериментально.

К отрицательным последствиям рождения квантовой механики можно отнести появление бесконечностей, например бесконечного количества степеней свободы в поле излучения. Бесконечности появлялись в выражении для связи электрона с полем и в поляризации вакуума. Эти бесконечности бросали тень на квантовую электродинамику до 1946 года, пока не был изобретен метод перенормировок.

Не менее быстро развивались и другие науки — химия, биология, геология. Квантово-механическое объяснение химической связи привело к рождению квантовой химии и позволило гораздо лучше понять структуру и свойства молекул и химических реакций. Появились новые разделы химии, например биохимия. Генетика стала отраслью биологии, как только было доказано, что хромосомы содержат гены — переносчики наследственной информации. Было установлено, что белки — существенные компоненты живых систем. Резко расширились знания о витаминах, гормонах, энзимах. Эмбриология приступила к исследованию раннего развития живых систем — как в клетке реализуется генетическая программа. В геологии происходили революционные перемены в связи с концепцией тектоники плит и дрейфа континентов А.Вегенера. Заканчивался первый период предположением В.Эльзассера о токах в жидкометаллическом ядре Земли как источнике земного магнетизма.

Но особенно выдающимся годом был 1932. Д.Чедвик обнаружил нейтрон, К.Андерсон — позитрон. Э.Ферми сформулировал теорию радиоактивного распада по аналогии с квантовой электродинамикой.

Г.Юри открыл тяжелую воду. Открытие нейтрона привело к развитию ядерной физики — ядро атома стали рассматривать как систему сильно взаимодействующих протонов и нейтронов. Родились два новых взаимодействия вдобавок к известным гравитационному и электромагнитному: сильное, связывающее частицы в ядра, и слабое, заведующее распадами элементарных частиц. Тогда ядерная физика была просто повторением атомной квантовой механики, работающим с энергиями в миллион раз больше. Это позволило понять структуру ядерных реакций и просто строение ядер. Чуть позднее была открыта искусственная радиоактивность и деление ядер с ужасными последствиями для всего человечества. Одним из важнейших достижений ядерной физики стало понимание источника солнечной и звездной энергии — термоядерных реакций слияния.

Удивительно, сколь немногочисленным в те годы было физическое сообщество: на конференции собиралось по пятьдесят-шестьдесят ученых. Не было особо строгого деления по областям работы. Все вместе обсуждали сюжеты из атомной, ядерной, молекулярной физики, астрономии, космологии и физики твердого тела. Все обсуждали всё. О практических применениях говорили мало. Квантовая механика считалась чем-то божественным.

Основные центры новой науки находились в Европе, особенно в Германии, и американские физики обычно по нескольку лет работали там, чтобы потом успешно продолжать работу на родине. В двадцатые годы в Америке были сделаны две блестящие экспериментальные работы: К.Дэвиссон и Л.Джермер в 1927 году открыли волновые свойства электрона, а А.Комптон в 1923 году обнаружил и объяснил рассеяние света электронами, доказав существование фотонов — квантов света.

В начале тридцатых годов США очень резко превращаются из научной провинции в лидирующую державу в области физики. Появление целого ряда блестящих физиков, получивших образование в Европе (Брейт, Кондон, Кембл, Раби, Слэтер, Милликен, Оппенгеймер), в сочетании с эмигрантами из Германии и Австрии было тому причиной.

Главная особенность довоенных исследований — малочисленность и дешевизна. В основном они велись за счет университетов и очень редко за деньги правительства. Огромное значение играла поддержка финансовых фондов. Например, быстрый прогресс биологии в тридцатые годы связан с тем, что Фонд Рокфеллера поддерживал биологию.

Идеализм приводил молодых людей в науку. Было не так много академических позиций и платили совсем немного. Многие вынуждены были зарабатывать преподаванием физики в школах — что, конечно же, вполне достойное занятие. Но в общем наука в этот период в интеллектуальном и социальном плане продолжала традиции девятнадцатого века.

Продолжение следует

НОВОСТИ НАУКИ

ТЕМНЫЕ СЕКРЕТЫ МЛЕЧНОГО ПУТИ

Черные дыры — это загадочные небесные объекты, в которых вещество спрессовано так сильно, что его сила притяжения не отпускает от себя даже световые лучи. Существование этих «монстров» было предсказано еще Альбертом Эйнштейном, а надежно зарегистрировать их на небесах пока не удается. Есть много намеков, косвенных свидетельств, и вот-вот проблема должна разрешиться.

Последний кандидат в черные дыры был обнаружен немецкими астрономами из института Макса Планка в самом центре нашей галактики — Млечного Пути. Перед этим космический телескоп «Хаббл» нашел черную дыру в два миллиарда солнечных масс в центре галактики NGC 3115 и дыру в тридцать шесть миллионов солнечных масс в галактике NGC 4258. И ту и другую удалось обнаружить, отслеживая движение звезд в центрах этих галактик. Что-то притягивает их там со страшной силой, а что — не видно!

После этих открытий было решено серьезно взяться за Млечный Путь. Но разобраться с собственной галактикой трудно, потому что разглядеть ее сердцевину мешает межзвездная пыль. Пришлось разработать новый трехметровый телескоп (и установить его в Чили,) да еще снабдить сложными компьютерными программами для борьбы с мешающими колебаниями земной атмосферы. В результате всех ухищрений удалось увидеть, что звезды в центральном районе движутся с колоссальными скоростями. Лучше всего их движение согласуется с наличием черной дыры массой около двух с половиной миллионов солнечных масс. Похоже, что черные дыры в центрах галактик — дело довольно обычное.

А.Семенов

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 1998 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5 — 97» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1606» или «Ф1613». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1607, М1608, М1614 предлагались на Санкт-Петербургской математической олимпиаде, задачи М1604 — М1613 — на XXIII Всероссийской математической олимпиаде. Задачи Ф1613 — Ф1617, Ф1613 — Ф1622 предлагались на Соровской олимпиаде по физике 1997 года.

Задачи М1606 — М1615, Ф1613 —Ф1622

М1606. Дан треугольник ABC. Постройте отрезок DE с концами на сторонах AB и BC, параллельный стороне AC и видимый из середины стороны AC под прямым углом.

Р.Травкин, 10 лет

М1607. Корень трехчлена $ax^2 + bx + b$ умножили на корень трехчлена $ax^2 + ax + b$ и получили в произведении 1. Найдите эти корни.

С.Берлов

М1608. На фестиваль военно-морской песни приглашены хоры из 100 стран. Каждый хор должен исполнить три песни и сразу уехать домой. Ознакомившись с текстами песен, организаторы обнаружили, что каждая песня оскорбительна для одной из участвующих стран. Докажите, что они могут назначить порядок выступлений таким образом, чтобы никому не пришлось выслушивать больше трех оскорбительных для его страны песен.

Ф.Назаров

М1609. Пусть $P(x)$ — а) квадратный трехчлен; б) многочлен четной степени с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что для любых действительных чисел x и y справедливо неравенство

$$(P(xy))^2 \le P(x^2)\cdot P(y^2).$$

Е.Малинникова

М1610. Переаттестация Совета Мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает на голову каждому колпак а) белого или черного; б) белого, синего или красного цвета. Каждый мудрец видит цвета колпаков всех впереди стоящих мудрецов, но не видит цвет своего колпака и цвета колпаков мудрецов, стоящих позади него. Затем мудрецы по одному называют какой-нибудь цвет (каждому разрешается говорить только один раз). После этого король исключает из мудрецов всех, не угадавших цвет своего колпака. Накануне переаттестации все члены Совета договорились между собой и придумали, как минимизировать число исключенных. Скольким из них гарантированно удастся избежать исключения?

К.Кноп

М1611. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D. Пусть M и N — середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K — середина отрезка CD. Докажите, что угол MKN прямой. (Можно считать, что точки C и D лежат по разные стороны от точки A.)

Д.Терешин

М1612*. В клетках таблицы $m\times n$ расставлены числа 1, 2, 3, ..., 100 так, что сумма любых двух соседних чисел не превосходит S. Найдите наименьшее возможное значение S. (Числа называются соседними, если они стоят в клетках, имеющих общую сторону.)

Д.Храмцов

М1613. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камней (возможно, по нескольку в одной клетке). Разрешается выполнять следующие действия:

1) снять по одному камню с клеток $n-1$ и n и положить один камень в клетку $n+1$;

2) снять два камня с клетки n и положить по одному камню в клетки $n+1$, $n-2$.
Докажите, что при любой последовательности мы достигнем ситуации, когда указанные действия больше выполнять нельзя, и эта конечная ситуация не зависит от последовательности действий (а зависит только от начальной раскладки камней по клеткам).

Д.Фон-Дер-Флаасс

М1614. На плоскости расположены $2n+1$ прямых. Докажите, что существует не более $n(n+1)(2n+1)/6$ различных остроугольных треугольников, стороны которых лежат на этих прямых.

С.Иванов

М1615. В прямоугольную коробку $m \times n$, где m и n – нечетны, уложены кости домино размерами 2×1 так, что остался не покрыт только квадрат 1×1 (дырка) в углу коробки. Если доминошка прилегает к дырке короткой стороной, ее разрешается сдвинуть вдоль себя на одну клетку, закрыв дырку (при этом открывается новая дырка). Докажите, что с помощью таких передвижений можно перегнать дырку в любой другой угол.

А.Шаповалов

Ф1613. На гладком горизонтальном столе находится тележка массой M, на ней два кубика массой $5M$ и M, связанных легкой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок (рис.1). Блок тянут постоянной силой в горизонтальном направлении, куски нити при этом горизонтальны. Коэффициент трения между поверхностью тележки и кубиками $\mu = 0{,}1$. При какой величине силы ускорение тележки составит $a = 0{,}2g$? Какими при этом будут ускорения кубиков и блока?

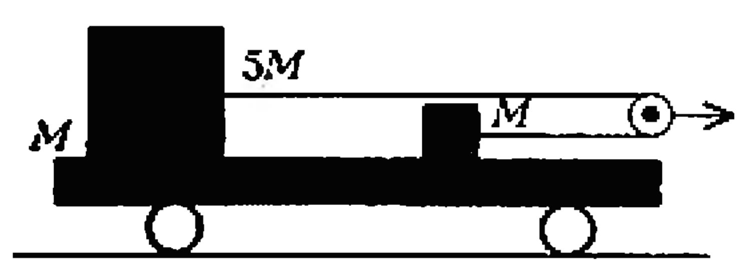


Рис.1

З.Рафаилов

Ф1614. На гладком горизонтальном столе находится тележка массой M, на которой вертикально стоит велосипедное колесо массой $3M$ (рис.2). Коэффициент трения между колесом и тележкой μ. К тележке прикладывают постоянную по величине горизонтальную силу, направленную параллельно плоскости колеса. При какой максимальной величине этой силы колесо сможет двигаться без проскальзывания относительно тележки? Считайте, что вся масса колеса сосредоточена на максимальном расстоянии от его центра – на внешней окружности.

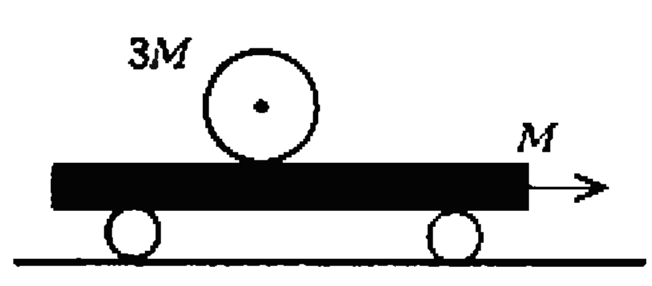


Рис.2

Р.Александров

Ф1615. В невесомости проводится следующий опыт. Заполненный воздухом большой сосуд содержит множество мельчайших масляных капелек и одну каплю довольно больших размеров. При столкновении маленьких капель между собой они упруго разлетаются, а при столкновении с большой каплей происходит их поглощение. За 1 час диаметр большой капли увеличился в 2 раза. Через какое время он увеличится еще в 2 раза? Большая капля не касается стенок сосуда. Испарения с ее поверхности не происходит.

З.Каплин

Ф1616. На компьютере сделана модель бильярда (рис.3): на квадратном гладком горизонтальном столе размером 1×1 м могут двигаться одинаковые шайбы диаметром 1 мм каждая, общее число шайб 10000, вначале компьютер располагает шайбы случайным образом. Один из углов квадрата срезан под углом 45°, образуя лузу длиной 1 см. Шайба, попавшая в лузу, вылетает со стола. В начальный момент одна из шайб имеет случайно направленную скорость, равную 1 м/с, остальные шайбы неподвижны. Все удары запрограммированы как абсолютно упругие (удары шайб друг о друга не лобовые!). Через какое время со стола вылетит первая тысяча шайб? Оцените также время, за которое в большинстве экспериментов через лузу вылетят все шайбы.

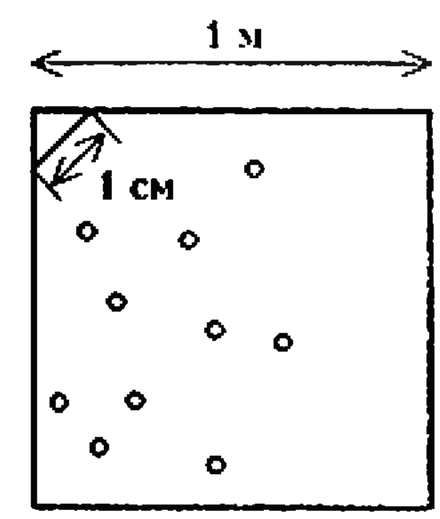


Рис.3

А.Зильберман

Ф1617. В вертикальном теплоизолированном сосуде под массивным подвижным поршнем находится порция идеального одноатомного газа при температуре T_0, поршень при этом находится в равновесии. Температуру газа в сосуде при помощи миниатюрного нагревателя очень быстро увеличивают в 2 раза и оставляют систему в покое. Какая температура установится в сосуде после того, как поршень перестанет двигаться? Трение поршня о стенки пренебрежимо мало. Поршень и стенки практически не получают тепла от газа. Воздуха снаружи нет.

М.Учителев

Ф1618. Теплопроводность дерева вдоль волокон в 2 раза больше, чем поперек. Два длинных тонких цилиндра одинаковых размеров сделаны из такого дерева, ось одного из них направлена вдоль волокон, ось другого составляет с направлением волокон угол 30°. Боковые поверхности цилиндров теплоизолируют и создают одинаковые разности температур между торцами цилиндров. Во сколько раз отличаются тепловые потоки в этих цилиндрах?

С.Варламов

Ф1619. Вдали от всех других тел в космосе двигаются два маленьких заряженных шарика, масса одного из них 1 г, другого 2 г. Заряды шариков равны по величине и противоположны по знаку. В данный момент расстояние между шариками 1 м, скорость более тяжелого шарика равна 1 м/с и направлена вдоль прямой, соединяющей центры шариков, по направлению от легкого шарика, скорость легкого шарика такая же по величине, но перпендикулярная указанной прямой. При какой величине зарядов шарики при дальнейшем движении побывают дважды на расстоянии 3 м друг от друга? Гравитационным взаимодействием шариков пренебречь.

З.Рафаилов

Ф1620. Цепь на рисунке 4 содержит огромное количество звеньев, каждое из которых состоит из резистора и двух вольтметров. Все вольтметры в цепи одинаковые, сопротивления всех резисторов равны между

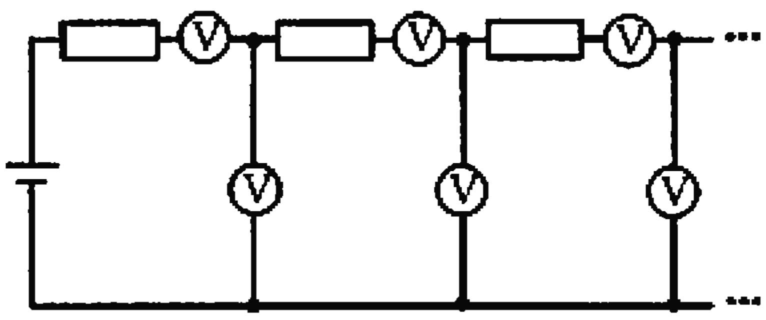


Рис.4

собой. Цепь подключают к батарейке, при этом первые два вольтметра показывают напряжения 6 В и 4 В (догадайтесь сами — какой показывает меньше, а какой больше). Найдите показания второй пары вольтметров. Найдите также сумму показаний всех вольтметров.

Р.Александров

Ф1621. Катушка индуктивности состоит из нескольких одинаковых витков очень тонкого провода, намотанных вплотную друг к другу. На оси катушки на некотором расстоянии от нее расположили еще один такой же замкнутый виток так, что ось витка совпадает с осью катушки. Катушку подключили к выходу источника переменного тока, при этом амплитуда тока отдельно расположенного витка оказалась в $k = 3$ раза меньше амплитуды тока катушки. Во сколько раз отличаются величины индуктивности катушки, измеренные без дополнительного витка и вместе с ним? Сопротивление провода, из которого сделаны витки, пренебрежимо мало. Считайте, что индуктивность катушки без дополнительного витка в 30 раз больше индуктивности одного витка.

А.Зильберман

Ф1622. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и двух одинаковых конденсаторов, вклю-

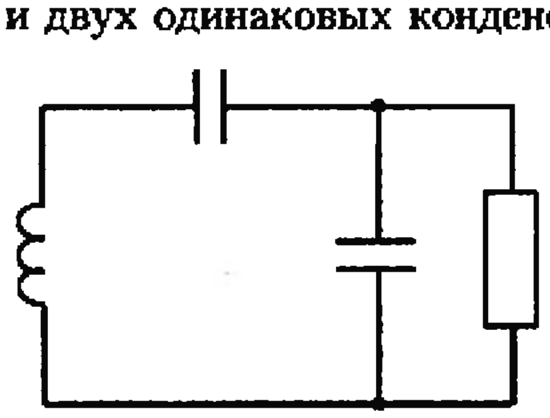


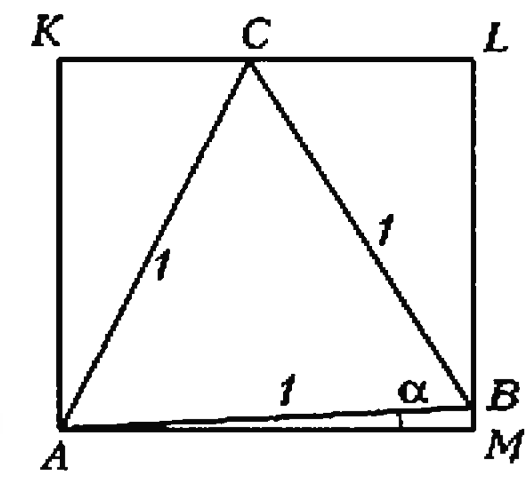
Рис.5

ченных между собой последовательно. Катушка и конденсаторы практически идеальные, но из-за наличия малого сопротивления соединяющих проводов $r = 0{,}1$ Ом колебания медленно затухают: за $n_1 = 10$ периодов колебаний амплитуда тока через катушку уменьшается на $\alpha = 1\%$. Параллельно одному из конденсаторов подключают резистор (рис.5), и теперь амплитуда колебаний уменьшается на тот же 1% за $n_2 = 2$ полных периода колебаний. Найдите сопротивление этого резистора.

А.Контуров

Решения задач М1586 — М1590, Ф1598 — Ф1606

М1586. *Из некоторого прямоугольника вырезан равносторонний треугольник так, что одна из его вер-*



шин находится в вершине прямоугольника, а две другие лежат на сторонах прямоугольника (не содержащих эту вершину). Докажите, что площадь одного из оставшихся прямоугольных треугольников равна сумме площадей двух других.

Одно из решений (см. рисунок): если $\angle BAM = \alpha$, то $\angle CBL = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 60^\circ = 30^\circ + \alpha$, $\angle CAK = 30^\circ - \alpha$, $\angle BCL = 60^\circ - \alpha$, и утверждение задачи сводится к проверке тождества (для $0 < \alpha < 30^\circ$):

$$\sin\alpha\cos\alpha + \sin(30^\circ-\alpha)\cos(30^\circ-\alpha) = \sin(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ+\alpha),$$

или, переходя к двойным углам,

$$\sin 2\alpha + \sin(60^\circ - 2\alpha) = \sin(60^\circ + 2\alpha).$$

Оно следует из формулы

$$\sin(60^\circ+2\alpha) - \sin(60^\circ-2\alpha) = 2\sin 2\alpha\cos 60^\circ.$$

А.Егоров

М1587. *Решите систему уравнений*

$$\frac{x+y}{1+xy} = \frac{1-ay}{a-y};\ \frac{x-y}{1-xy} = \frac{1-bx}{b-x},$$

где a, b — данные положительные числа.

Ответ: $x = \dfrac{\sqrt[5]{l^2} - \sqrt[5]{k}}{\sqrt[5]{l^2} + \sqrt[5]{k}}$, $y = \dfrac{1-\sqrt[5]{lk^2}}{1+\sqrt[5]{lk^2}}$, где $k = \dfrac{1-a}{1+a}$, $l = \dfrac{b+1}{b-1}$.

Решая систему, мы будем считать, что все действия являются допустимыми.

Вычитая и прибавляя единицу к левой и правой частям первого уравнения, получаем равенства

$$\frac{(1-x)(1-y)}{1+xy} = \frac{(1-a)(1+y)}{a-y},$$

$$\frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} = \frac{(1+a)(1-y)}{a-y}.$$

Поделив почленно первое из этих равенств на второе, получим после несложных преобразований

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-a}{1+a}\cdot\frac{(1+y)^2}{(1-y)^2}.$$

Аналогично поступая со вторым уравнением системы, приходим к уравнению

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = \frac{b+1}{b-1}\cdot\frac{1+y}{1-y}$$

Положив $s=\frac{1-x}{1+x}$, $t=\frac{1+y}{1-y}$, приходим к системе

$$\begin{cases} s=kt^2, \\ \frac{1}{s^2}=lt, \end{cases}$$

где $k=\frac{1-a}{1+a}$, $l=\frac{b+1}{b-1}$, откуда следует, что

$s^5=\frac{k}{l^2}$, т.е. $s=\sqrt[5]{\frac{k}{l^2}}$, $t=\frac{1}{\sqrt[5]{lk^2}}$.

Исследование решений в зависимости от параметров предоставляем читателю.

А.Егоров

М1588. *Два чеканщика играют в следующую игру. Они по очереди чеканят новые монеты достоинством в целое число рублей каждая. При очередном ходе не разрешается чеканить монету в один рубль, а также монету, которая уже имеется, или которую можно разменять любым количеством (не обязательно разных) монет уже имеющегося достоинства. Проигрывает тот, кто не может отчеканить новую монету.*
а) Докажите, что игра обязательно закончится через конечное число ходов.
б) Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер — и какой должна быть его стратегия?

а) Условимся, что все (малые) буквы ниже означают целые числа. Решение опирается на такой факт из теории чисел:

Лемма 1. *Если a и b — натуральные числа с наибольшим общим делителем d, то любое достаточно большое (скажем, большее ab) число z, кратное d, представляется в виде*

$$z=ax+by, \qquad (1)$$

где $x \ge 0$ и $y \ge 0$.

Очевидно, для доказательства достаточно рассмотреть лишь случай $d=1$, т.е. взаимно простых a и b (от пары a, b можно перейти к паре a/d, b/d). Разными способами — например, с помощью алгоритма Евклида — можно доказать, что представление (1) с некоторыми целыми x, y существует для любого z (собственно говоря, это достаточно доказать лишь для $z=1$). Далее, все возможные представления z получаются из какого-то одного по формуле $x'=x-tb$, $y'=y+ta$:

$$z=a(x-tb)+b(y+ta)=ax'+by'$$

(где t — любое целое число). Таким образом, существует единственное представление (1), в котором $0 \le x \le b-1$; будем называть его *основным*. Ясно, что если $z \ge a(b-1)$, то в его основном представлении $y \ge 0$. Тем самым, лемма 1 доказана.

Из нее (по индукции) получается аналогичное утверждение для n натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Лемма 2. *Множество A_n чисел, представимых в виде $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$, где $x_i \ge 0$, содержит все достаточно большие числа, кратные наибольшему общему делителю чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

Теперь перейдем непосредственно к задаче а). Пусть последовательно отчеканены монеты $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$; d_n для каждого n — наибольший общий делитель чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$; A_n — соответствующее множество из леммы 2. Ясно, что $d_1 \ge d_2 \ge d_3 \ge \ldots$, причем в этой цепочке каждый делитель $d=d_n$ может повториться лишь конечное число раз (поскольку множество натуральных чисел, делящихся на d и не входящих в A_n, конечно). Это относится и к последнему d, равному 1. Тем самым, игра может продолжаться лишь конечное число ходов.

б) **Ответ:** выигрывает первый чеканщик. (Мы докажем это, не приводя в явном виде всей стратегии.)

Выигрывающий первый ход: 5 (или любое простое $p \ge 5$). Пусть второй назвал число q, взаимно простое с $p=5$.

Лемма 3. *Наибольшее число m, не представимое в виде $px+qy$ ($x \ge 0$, $y \ge 0$), равно $m=pq-p-q$, причем если $z \le m$ не представимо, то $m-z$ — представимо в таком виде, и обратно.*

В самом деле, если в основном представлении

$$z=px+qy \qquad (2)$$

(где $0 \le x \le q-1$) коэффициент $y<0$, то $m-z=p(q-1-x)+q(-1-y)$ — основное представление числа $m-z$ (поскольку $0 \le q-1-x \le q-1$ и $-1-y \ge 0$); если же в представлении (2) $y \ge 0$, то $-1-y<0$. Поскольку 0 — наименьшее представимое, то $m-0=pq-p-q$, как и утверждалось в лемме 3, — наибольшее непредставимое.

Попробуем в качестве ответного хода первого чеканщика (после хода q) назвать m. Предположим, что этот ход проигрышный, т.е. у второго есть выигрышная стратегия, начинающаяся ходом z (разумеется, $1<z<m$, поскольку все числа, большие m, уже запрещены). Тогда тот же ход z мог сделать первый чеканщик вместо хода m, и дальше следовать выигрышной стратегии второго: ведь по лемме 3

$$m-z=px+qy \quad (x \ge 0,\ y \ge 0),$$

$m=z+px+qx$ было бы запрещено после хода z, так что множество запрещенных чисел осталось бы точно таким же, как и после пары ходов m, z.

Это, видимо, одна из красивейших задач, использующих нетривиальную идею «перемены хода», встречающуюся и в реальных позиционных играх (автор — Дирк Шляйхер — замечательный математик и педагог, один из энтузиастов «Турнира городов» в Германии).

Замечания.

*1.*Лемма 3 осимметрии была предложена А.А.Кирилловым в качестве отдельной задачи «Задачника «Кванта».

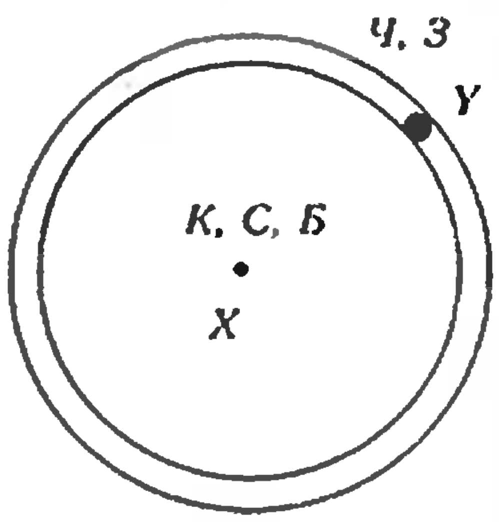
2. В нашем решении используется теорема о конечных позиционных играх (почти очевидная): все позиции в такой игре делятся на выигрышные и проигрышные (для начинающего); установить, какова каждая позиция, можно, разбирая игру «с конца».

Н.Васильев, А.Канель

М1589. *Докажите, что, как бы ни раскрасить плоскость в 5 цветов, найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми отличается от 1 не более чем на 0,001.*

Начнем с того, что, поскольку мы должны найти две точки на расстоянии 1 лишь «с точностью до любого ε», мы можем ограничиться лишь раскрасками сравнительно простых «карт». В самом деле, нарисуем на плоскости мелкую сетку из квадратов или, удобнее, правильных шестиугольников со стороной $\varepsilon/4$ и раскрасим каждую шестиугольную клетку в тот цвет, который имел в первоначальной раскраске ее центр. Если мы найдем нужные точки A, B «с точностью до $\varepsilon/2$» на новой карте, то центры A', B' клеток, которым принадлежат A и B, удовлетворяют условию « с точностью до ε »: ведь $|AB - A'B'| \le 2 \cdot \varepsilon/4 \le \varepsilon/2$, так что если $|1 - AB| \le \varepsilon/2$, то $|1 - A'B'| \le \varepsilon$. Мы можем считать при этом, что границы клеток раскрашены в два (а вершины — в три) цвета.

Предположим, что для некоторой раскраски (и некоторого ε) утверждение задачи неверно. Рассмотрим случай, когда некоторые три клетки разного цвета имеют общую вершину X. Пусть эти три цвета — Красный, Синий и Белый. Тогда кольцо радиусом 1 с центром X шириной ε должно быть целиком покрашено в два других цвета — скажем, Черный и Зеленый. Если оно целиком одного цвета — Ч, то, очевидно, на нем есть две точки этого цвета на расстоянии 1. В другом случае на кольце есть точка Y двух цветов: Ч и З; тогда достаточно рассмотреть точки кольца на расстоянии 1 от Y (см. рисунок).



Осталось рассмотреть случай, когда никакие три разных цвета не сходятся вместе. Тогда граница области каждого цвета должна иметь какой-то один определенный цвет — иначе, идя по границе, мы должны были бы наткнуться на тройную точку. Рассмотрим некоторую точку X на границе двух цветов, скажем цветов К и С. Кольцо радиусом 1 (шириной ε) с центром X раскрашено в три цвета Ч, З, Б, и можно считать, что на нем есть точка Y цветов Ч и Б. Тогда кольцо радиусом 1 (шириной ε) и центром Y имеет цвета К, С, З. Рассмотрим Зеленую область, содержащую одну из точек пересечения двух колец. У нее не может быть границы одного цвета: в одном из колец она имеет цвета Ч или Б, в другом — К или С. Получили противоречие, завершающее решение.

Замечание. Известна следующая проблема. Плоскость раскрашена в n цветов. При каком n обязательно найдутся две точки на единичном расстоянии? Нетрудно показать справедливость этого утверждения при $n = 3$. При $n = 7$ относительно легко строится контрпример (конструкция типа пчелиных сот). Недавно был построен контрпример при $n = 6$. Про $n = 4, 5$ ничего не известно. Известно только, что если раскраска, не допускающая единичных расстояний, существует, то некоторые множества точек одного цвета неизмеримы. Если же требовать наличия «почти единичных расстояний», то точный ответ таков: $n = 5$ (это следует из построенного ранее контрпримера).

А.Канель

М1590. *На окружности круглого острова расположены по часовой стрелке четыре порта: 1, 2, 3, 4. На этом острове имеется плоская сеть дорог с односторонним движением, не имеющая кольцевых маршрутов: выехав из какого-либо порта или с развилки дорог, нельзя вернуться в этот же пункт снова. Для любых двух портов i и j обозначим через* f_{ij} *число различных путей из i и j.*

а) Докажите неравенство $f_{14}f_{23} \ge f_{13}f_{24}$.

б) Предположим, что на окружности острова шесть портов: 1, 2, 3, 4, 5, 6, перечисленных по часовой стрелке. Докажите неравенство

$$f_{16}f_{25}f_{34} + f_{15}f_{24}f_{36} + f_{14}f_{26}f_{35} \ge f_{16}f_{24}f_{35} + f_{15}f_{26}f_{34} + f_{14}f_{25}f_{36}.$$

(«Плоская сеть» означает, что дороги не проходят одна над другой.)

Заметим, что отсутствие циклов (кольцевых маршрутов) позволяет упорядочить все развилки (занумеровать их так, что вдоль каждого пути номера увеличиваются): для любых двух развилок или портов можно при этом сказать, какая идет раньше другой, и проехать из той, что идет позже, в более раннюю нельзя.

Теперь перейдем к решению задачи.

Рис. 1

а) Рассмотрим всевозможные пары путей, идущих из порта 1 в порт 3 и из 2 — в 4 (рис.1); коротко будем писать: пары $1 \to 3$, $2 \to 4$. Их число равно $f_{13}f_{24}$. На каждой такой паре есть хоть одна общая точка (развилка или порт). Выберем самую раннюю из них M и «поменяем хвосты» путей, начиная от этой точки M. Так мы получим некоторую пару путей $1 \to 4$, $2 \to 3$. Ясно, что разным парам путей $1 \to 3$, $2 \to 4$ при этом соответствуют разные пары $1 \to 4$, $2 \to 3$, поскольку самая ранняя точка пересечения путей M и «операция замены хвостов» определены однозначно. (Более того, ясно, что любая пара $1 \to 4$, $2 \to 3$, имеющая хоть одну общую точку, будет соответствовать некоторой паре $1 \to 3$, $2 \to 4$.)

Отсюда следует неравенство $f_{14}f_{23} \ge f_{13}f_{24}$, поскольку левая часть — это общее число путей $1 \to 4$, $2 \to 3$ (более точное утверждение: разность $f_{14}f_{23} - f_{13}f_{24}$ равна числу пар путей $1 \to 4$, $2 \to 3$, не имеющих общих точек).

б) Решение аналогично, но описание соответствия требует аккуратности.

Сначала — одно определение. Среди шести отображений множества {1, 2, 3} на {4, 5, 6} назовем *четными* те, для которых отображение «сохраняет ориентацию треугольника»: $1 \to 4$, $2 \to 5$, $3 \to 6$; $1 \to 5$, $2 \to 6$, $3 \to 4$ и $1 \to 6$, $2 \to 4$, $3 \to 5$, и *нечетными* — остальные (мы представляем себе два правильных треугольника с вершинами 1, 2, 3 и 4, 5, 6, наложенных друг на друга). Если поменять местами образы каких-то двух из номеров {1, 2, 3}, то четность меняется на противоположную (эта операция соответствует зеркальному отражению треугольников).

Теперь перейдем к решению задачи. Рассмотрим тройку путей $1 \to i$, $2 \to j$, $3 \to k$, где (i, j, k) — некоторая перестановка {4, 5, 6}. Если какие-то два из них имеют хоть одну общую точку, то выберем самую раннюю из них M и «поменяем хвосты» двух путей, проходящих через эту точку. (Если через M проходят все три пути $1 \to i$, $2 \to j$, $3 \to k$, то установим какое-то четкое пра-

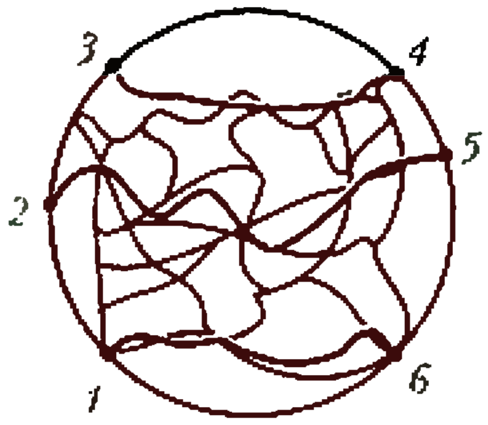


Рис.2

вило: скажем, меняем хвосты $1 \to i$ и $2 \to j$.) Заметим, что четность отображения $1 \to i$, $2 \to j$, $3 \to j$ при перемене хвостов меняется. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между четными и нечетными тройками путей, имеющих общие точки. Остается заметить, что (рис.2) любой тройке не имеющих общих точек путей соответствует нечетное отображение $1 \to 6$, $2 \to 5$, $3 \to 4$. Значит, нечетных троек больше. Отсюда следует неравенство пункта б) задачи.

С.Фомин, Н.Васильев

Ф1598. *Вдали от всех тел, в глубинах космоса движется летающая тарелка. Скорость ее в некоторый момент равна v_0. Пилот хочет произвести маневр, в результате которого вектор скорости повернется на 90° и составит по величине v_0, как и до начала маневра. Ускорение тарелки при маневре не должно превышать заданной величины a. Найдите минимальное время маневра. Чему будет равно минимальное смещение тарелки за это время?*

Изменение вектора скорости можно найти, сравнивая начальную и конечную скорости тарелки — этот вектор направлен под углом 135° к начальной скорости и равен по величине $v_0\sqrt{2}$. Ясно, что минимальное время маневра при ограниченном значении ускорения составит

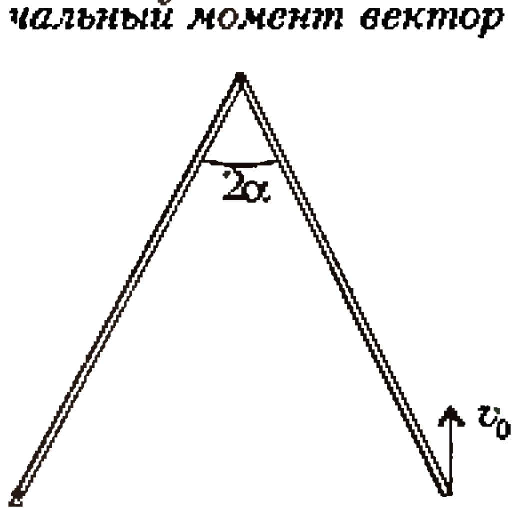
$$\tau = v_0\sqrt{2}/a.$$

Вопрос о смещении за время маневра поставлен в задаче неудачно. Если нужно найти *минимальное* смещение, то оно равно нулю — можно сделать так, чтобы к моменту смены направления скорости оказаться в прежней точке. А вот если нас интересует смещение во время маневра, при котором *время оказывается минимальным*, тогда можно немного посчитать. Задача легко сводится к вычислению дальности полета тела, брошенного со скоростью v_0 под углом 45° к горизонту, при величине ускорения свободного падения a:

$$l = v_0^2/a.$$

З.Рафаилов

Ф1599. *Два стержня длиной L каждый соединены шарнирно (см. рисунок). Свободный конец одного из стержней шарнирно закреплен, а свободный конец другого стержня начинают двигать с постоянной по величине и направлению скоростью $\vec{v}_0$, причем в начальный момент вектор скорости параллелен биссектрисе угла 2α, составленного стержнями в этот момент. Найдите величину и направление вектора ускорения шарнира, соединяющего стержни, через очень маленький отрезок времени после начала движения.*



Шарнир, находящийся в вершине угла, движется по окружности с центром в точке закрепления системы. Обозначим его скорость u. Проекции скоростей на направление правого стержня должны быть равны между собой (нерастяжимость стержня):

$$u\sin 2\alpha = v_0\cos\alpha.$$

Теперь мы можем записать выражение для центростремительного ускорения интересующего нас шарнира:

$$a_{ц} = \frac{u^2}{L} = \frac{v_0^2}{4L\sin^2\alpha}.$$

Полное ускорение шарнира представим в виде суммы двух векторов — один из них a_1 направим против вектора v_0, а другой a_2 направим перпендикулярно ему влево. Тогда можно записать

$$a_1\cos\alpha + a_2\sin\alpha = a_{ц} = \frac{v_0^2}{4L\sin^2\alpha}.$$

Перейдем в систему отсчета, связанную с концом правого стержня, который движется с постоянной скоростью v_0. В этой системе верхний шарнир снова движется по окружности, только ее центр находится в упомянутой точке. После несложных тригонометрических преобразований можно убедиться, что скорость шарнира и в этом случае равна $v_0\cos\alpha/\sin 2\alpha = v_0/(2\sin\alpha)$, а центростремительное ускорение по величине осталось прежним, но изменилось по направлению. Теперь его можно выразить через введенные выше ускорения так:

$$a_1\cos\alpha - a_2\sin\alpha = a_{ц} = \frac{v_0^2}{4L\sin^2\alpha}.$$

Отсюда сразу следует, что $a_2 = 0$, а полный вектор ускорения верхнего шарнира в интересующий нас момент направлен против вектора v_0 (по биссектрисе) и равен

$$a = a_1 = \frac{v_0^2}{4L\sin^2\alpha\cos\alpha}.$$

А.Зильберман

Ф1600. *На гладкой горизонтальной поверхности стола стоит обруч радиусом R и массой M. Обруч пытались перепилить, однако дело не было доведено до конца. Масса удаленных опилок составила m, размер поврежденной области очень мал по сравнению с радиусом обруча. В начальный момент поврежденное место находится точно внизу, и от совсем малого толчка обруч выходит из состояния равновесия. Найдите максимальное смещение центра обруча и его максимальную угловую скорость. Найдите также максимальную скорость центра обруча. Считайте, что обруч все время остается в вертикальной плоскости.*

Положим $m/M = \delta \ll 1$. Для упрощения расчетов вернем на место удаленные опилки, а в диаметрально противоположной точке добавим массу m. Пусть скорость центра обруча в некоторый момент u, угол поворота φ и угловая скорость ω. Запишем закон сохранения импульса в проекциях на горизонтальное направление:

$$Mu = m(\omega R\cos\varphi - u)$$

и закон сохранения энергии:

$$mgR(1-\cos\varphi) = \frac{Mu^2}{2} + \frac{M\omega^2R^2}{2}$$

(мы пренебрегли энергией маленькой массы, поскольку она движется вместе с другими точками массивного обруча). Для нахождения максимальной скорости центра обруча выразим его угловую скорость из первого уравнения и подставим во второе уравнение, а затем выразим скорость центра обруча через угол поворота и найдем максимум, приравняв нулю его производную по углу. Учитывая малость отношения масс, получим

$$u^2 = 2\delta^3 gR\cos^2\varphi(1-\cos\varphi).$$

Не будем извлекать корень, а найдем максимум квадрата скорости — это достигается при $\cos\varphi = 2/3$. Соответствующее значение максимальной скорости центра обруча составит

$$u_0 = \sqrt{\frac{8\delta^3 gR}{27}}.$$

Максимальное значение угловой скорости обруча соответствует углу поворота $\varphi = 180°$:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\delta g}{R}}.$$

С максимальным смещением центра обруча дело обстоит сложнее. В условии задачи сказано просто о малом толчке, но если при этом скорость центра масс выведенной из равновесия системы равна нулю, то мы можем посчитать максимальное смещение центра. В противном случае стоит подождать подольше, и обруч уедет на любое сколь угодно большое расстояние. Рассмотрим случай нулевой скорости центра масс. Максимальное смещение соответствует самому правому положению малой массы, при этом $\varphi = 90°$ и смещение массы m относительно центра обруча равно R. Обозначив смещение x, получим

$$Mx = m(R-x),$$

откуда

$$x = \frac{mR}{M+m} \approx \delta R.$$

Р.Александров

Ф1601. *Небольшое тело прикреплено к невесомому жесткому обручу радиусом R. Обруч удерживают в положении, показанном на рисунке 1. На каком расстоянии от вертикальной стенки тело коснется горизонтальной плоскости после освобождения обруча? Трением пренебречь.*

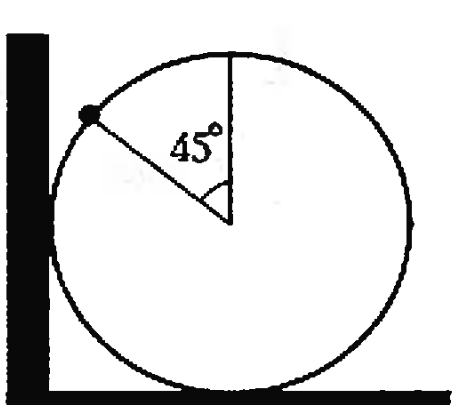


Рис.1

Так как обруч имеет нулевую массу, после освобождения системы ни со стороны стенки, ни со стороны пола на обруч не будут действовать силы и груз будет падать с ускорением g. (Это легко понять, поскольку, если бы силы возникали, их моменты приводили бы к бесконечному угловому ускорению обруча относительно оси, проходящей через точку прикрепления к нему груза.) Когда груз, поворачивая обруч, долетит до точки B (рис.2), произойдет ударное взаимодействие груза — через обруч — со стенкой и полом. Действующие со стороны стенки и пола ударные силы будут равны по величине и пройдут через центр обруча (только в момент удара становится существенным, что нет трения). Поскольку удар абсолютно упругий, величина скорости не меняется. Ударные силы не могут изменить и тангенциальную (по отношению к обручу) составляющую скорости груза, нормальная же составляющая изменяет свое направление на противоположное. В результате после удара скорость груза в точке B будет горизонтальной. Дальнейшее его движение можно рассматривать как полет горизонтально брошенного тела, поскольку сила со стороны пола будет возникать лишь в моменты касания груза с полом. Расчет расстояния от точки O до точки D первого касания груза с полом не представляет сложности:

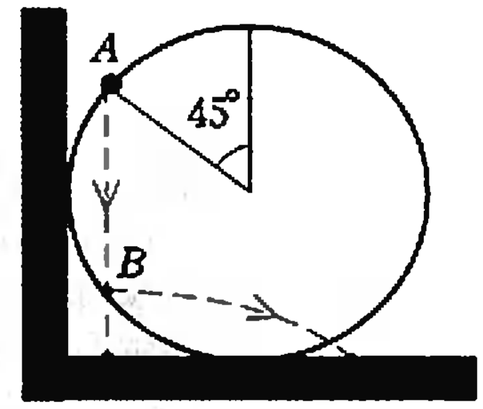


Рис.2

$$OD = OC + CD,\ OC = R\left(1-\sqrt{2}/2\right),$$

$$CD = vt = \sqrt{2\sqrt{2}gR}\sqrt{\frac{R\left(2-\sqrt{2}\right)}{g}} = 2R\sqrt{\sqrt{2}-1},\ OD \approx 1{,}6R.$$

М.Бакунов, С.Бирагов

Ф1602. *Сосуд объемом 5 литров с жесткими стеклянными стенками соединен короткой жесткой трубкой с горлышком литровой пластиковой бутылки из-под газированной воды — ее тонкие стенки практически нерастяжимые, но довольно мягкие. В системе из двух сосудов находится неизменное количество воздуха. Воздух понемногу охлаждают, измеряя его давление. Вплоть до температуры +50 °С давление в системе уменьшалось, а начиная с этой температуры перестало уменьшаться. При какой температуре давление снова начнет уменьшатся? Атмосферное давление остается постоянным.*

Решение этой задачи совсем простое. Ясно, что вначале давление в сосудах превышало атмосферное и общий объем системы составлял 6 л (банка плюс бутылка). Когда давление при охлаждении достигает атмосферного, бутылка «сминается» и объем системы становится меньше. Давление в системе снова начнет падать после того, как объем бутылки упадет до нуля и общий объем системы станет равным 5 л. Это будет при температуре

$$T_2 = \frac{5}{6}T_1 = \frac{5}{6}\cdot 323\text{К} \approx 269\text{К} = -4\ °\text{С}.$$

С.Варламов

Ф1603. В *калориметре в воде плавает кусок льда. Опускаем в калориметр нагреватель постоянной мощности 50 Вт и начинаем каждую минуту измерять температуру воды. За первую минуту темпе-*

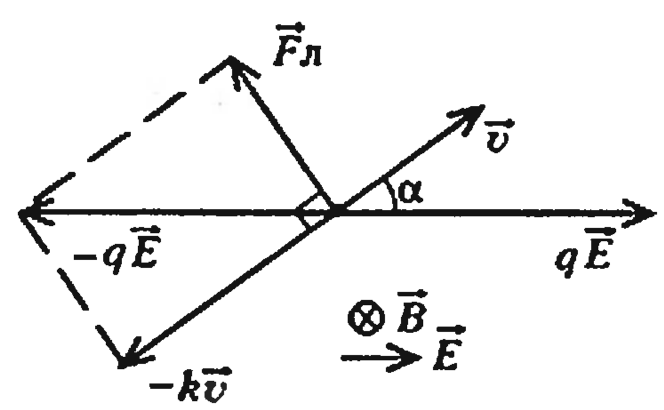
ратура увеличилась на 2 градуса, а к концу четвертой — еще на 5 градусов. Сколько было в калориметре воды и сколько льда?

При попытке решать эту задачу как обычно — вначале расплавился лед, потом начала нагреваться вода и т.д. — мы сталкиваемся с противоречием: все должно быть наоборот, т.е. именно за первую минуту нагрев должен получиться меньше, чем за последующие, а никак не больше! Попробуем придумать объяснение этому странному факту. Можно предположить, что дело в плохом перемешивании воды — там, где находится термометр, температура уже поднялась, а там, где понемногу плавится лед, температура осталась равной нулю. При этом можно грубо оценить количество воды: за первую минуту вода получила 3000 Дж тепла и нагрелась на 2 градуса, что соответствует массе воды примерно 0,36 кг. Какую часть этой массы составляет лед? Если попробовать оценить его массу по разнице теплоемкостей за первую и последующие минуты, мы получим примерно 0,1 — 0,15 от массы воды, но это слишком много — для плавления 50 г льда нужно почти 20 кДж тепла, а наш нагреватель такой энергии за 3–4 минуты не даст. Вывод: количество воды мы оценили слишком грубо, но лучшей оценки не видно. Лед явно не растаял весь, его масса больше 20–30 г, перемешивание воды в сосуде плохое — этим можно объяснить снижение скорости нагрева по мере того как понемногу подогревается масса воды, полученная при таянии льда.

А.Теплов

Ф1604. *Частица с зарядом q влетает в область взаимно перпендикулярных однородных электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$. В этой области на частицу действует также сила вязкого трения $\vec{F} = -k\vec{v}$ (k — заданная положительная величина, $\vec{v}$ — мгновенная скорость частицы). Найдите скорость установившегося движения частицы.*

Направим магнитное поле за чертеж, а электрическое — вправо (см. рисунок). При движении заряда с уста-



новившейся скоростью $\vec{v}$ сумма действующих на него сил равна нулю:

$$q\vec{E} + \vec{F}_л - k\vec{v} = 0,$$

где $\vec{F}_л$ — сила Лоренца ($F_л = qvB$).
Из рисунка очевидны как величина установившейся скорости, так и угол α между векторами $\vec{v}$ и $\vec{E}$:

$$v = \frac{qE}{\sqrt{q^2B^2 + k^2}},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{qB}{k}.$$

М.Бакунов, С.Бирагов

Ф1605. *Заряженный конденсатор емкостью C подключают к последовательно соединенным батарейке напряжением U_0 и резистору сопротивлением R. С момента подключения в резисторе выделилось количество теплоты Q. Найдите по этим данным начальное напряжение конденсатора.*

Обозначим начальное напряжение конденсатора U. Условно «плюс» этого напряжения будем считать подключенным к «плюсу» батарейки, а если мы получим отрицательную величину этого напряжения, это будет означать просто другую полярность, уравнения переписывать нам не придется. Ясно, что конечным напряжением конденсатора будет напряжение батарейки, заряд, который протек через батарейку, точнее — который батарейка «протолкнула» по цепи, составит $C(U_0 - U)$, а работа батарейки окажется равной $C(U_0 - U)U_0$. Теперь можно записать баланс энергий:

$$\frac{CU^2}{2} + C(U_0 - U)U_0 = \frac{CU_0^2}{2} + Q.$$

Это уравнение легко решить относительно величины U:

$$U = U_0 \pm \sqrt{2Q/C}.$$

А.Теплов

Ф1606. *Проводящая квадратная рамка, сделанная из тонкой проволоки с очень высоким удельным сопротивлением, симметрично охватывает длинный соленоид радиусом R (рис.1). Однородное магнитное поле внутри соленоида возрастает со временем по линейному закону $B = \alpha t$. Пренебрегая магнитным полем вне соленоида и собственным магнитным полем рамки, найдите показания вольтметра, подключенного проводами к симметричным точкам 1 и 2. Что покажет вольтметр, если его присоединить к точке 1 и ближайшему к ней углу рамки?*

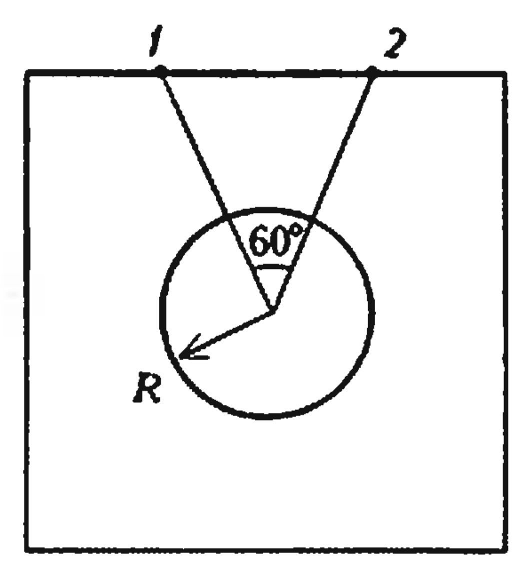


Рис.1

По закону Фарадея в рамке возникает электродвижущая сила, равная

$$\mathcal{E} = \Phi' = \alpha\pi R^2.$$

Индукционный ток I (рис.2), который идет по часовой стрелке, находим из закона Ома:

$$I = \frac{\alpha\pi R^2}{r},$$

где r — сопротивление рамки. Будем считать, что сопротивление вольтметра во много раз превышает сопротивление провода, из которого сделан квадрат (упоминание о высоком удельном сопротивлении провода в условии задачи необходимо для того, чтобы

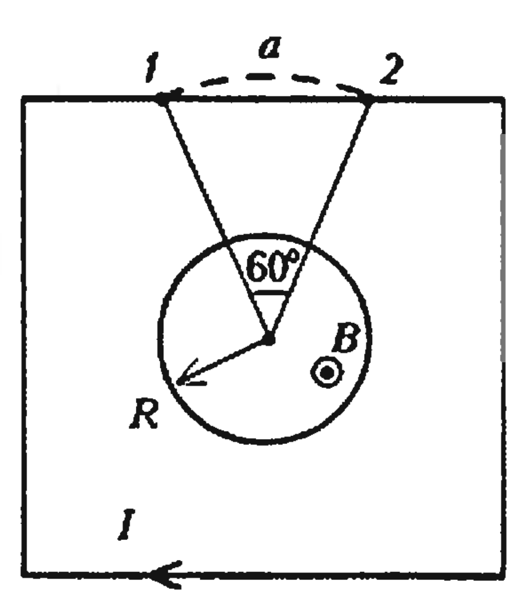


Рис. 2

было оправдано пренебрежение собственным магнитным полем рамки). Если контур, образованный вольтметром с подводящими проводами и участком *1 — 2* рамки, не охватывает соленоид, то величина ЭДС индукции в контуре равна нулю. В этом случае показания вольтметра определяются лишь падением напряжения на куске провода *1 — 2*:

$$U_1 = Ir_{12} = \frac{\alpha\pi R^2}{4\sqrt{3}}.$$

Если же контур, содержащий вольтметр с проводами и участок *1 — 2*, охватывает соленоид, то в этом контуре действует ЭДС индукции и показания вольтметра можно найти с помощью закона Ома для полной цепи:

$$U_2 = \mathcal{E} - Ir_{12} = \alpha\pi R^2\left(1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}\right).$$

Очевидно, что при расчете в первом случае можно было рассматривать и другой контур — образованный вольтметром и остальной частью квадрата (за исключением участка *1 — 2*). Этот контур охватывает соленоид, и расчет получается похожим на второй случай. Ответ же, разумеется, не зависит от способа расчета и составляет опять U_1.

Подключение вольтметра между точкой *1* и ближайшим к ней углом квадрата — точкой *3* — рассчитывается аналогично. В том случае, например, когда этот маленький контур не охватывает соленоид, вольтметр покажет

$$U_3 = Ir_{13} = \frac{\alpha\pi R^2\left(\sqrt{3}-1\right)}{8\sqrt{3}}.$$

Важно понимать, что *напряжение* между точками *1* и *2* (именно его показывает вольтметр в нашем случае) не равно *разности потенциалов* между этими точками. Покажем, как вычислить разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, и сравним ее с напряжением. Запишем закон Ома для участка *1 – 2*:

$$Ir_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12},$$

где $\mathcal{E}_{12}$ — электродвижущая сила на участке *1 – 2*. Две особенности задачи облегчают нахождение $\mathcal{E}_{12}$. Во-первых, из-за малости магнитного поля вне соленоида ЭДС на прямом участке *1 – 2* и на дуге *1 – a – 2* одна и та же: $\mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}_{1a2}$. Возможно, это легче понять из рассмотрения замкнутого контура *1 – a – 2 – 1*, ЭДС на котором равна нулю, ибо этот контур охватывает нулевой магнитный поток. Во-вторых, вихревое поле вне соленоида (и внутри тоже) обладает осевой симметрией, поэтому

$$\mathcal{E}_{1a2} = \frac{\alpha\pi R^2}{6}.$$

В итоге находим разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\alpha\pi R^2}{4\sqrt{3}}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx -0{,}02\alpha\pi R^2.$$

Видно, что разность потенциалов действительно совсем не равна напряжению. Отличия были бы еще сильнее, если бы мы рассмотрели точки, лежащие в вершинах квадрата, — разность потенциалов между ними в точности равна нулю.

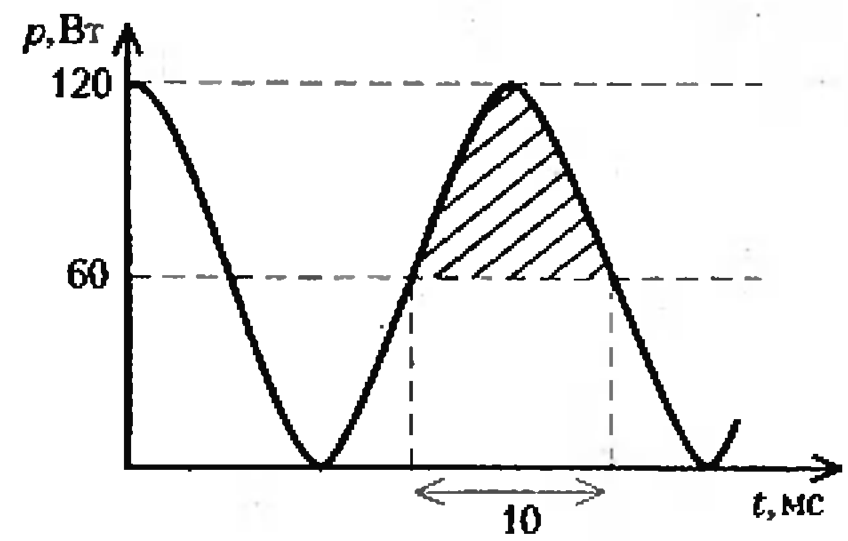
М.Бакунов, С.Бирагов

Ф1607. *Нить накала осветительной лампочки мощностью 60 Вт сделана из вольфрама. Оцените, при какой массе нити накала минимальная температура отличается от средней не более чем на 100 К.*

Температура нити накала лампочки больше 2000 К, поэтому для грубой оценки можно считать сопротивление нити при изменении температуры на 100 К постоянным. Предположим, что лампочка излучает постоянную мощность 60 Вт, а изменение температуры связано с тем, что мощность сети половину периода больше этой величины, а половину — меньше. Запишем выражение для мгновенной мощности:

$$p = \frac{U_0^2}{R}\cos^2\omega t = \frac{U_0^2}{2R}(1 + \cos 2\omega t).$$

На графике (см. рисунок) заштрихована область «лишней» мощности — площадь ее равна «лишней» энергии, поступившей в лампочку за половину периода



сети, т.е. за 0,01 с. Найти эту площадь можно, подсчитав соответствующий интеграл, но — учитывая грубость оценки — можно и просто ее оценить:

$$W \approx 0{,}6 \cdot 60 \cdot 0{,}01 \text{ Дж} \approx 0{,}4 \text{Дж}.$$

Приняв величину удельной теплоемкости для вольфрама равной c = 150 Дж/(кг·К), для массы m нити получим

$$m = \frac{W}{c\Delta T} = 0{,}03 \text{ г}.$$

Мы не учитывали возрастание излучаемой мощности с ростом температуры (закон Стефана — Больцмана, утверждающий пропорциональность излучаемой мощности четвертой степени абсолютной температуры, дает существенное увеличение этой мощности в сравнении со средней — больше 10%, однако для грубой оценки это не очень важно), поэтому на самом деле «лишняя» энергия будет меньше вычисленной нами и масса нити накаливания получится тоже поменьше.

А.Светлов

Задачи

1. После выигранного сражения маршал наградил 15 своих генералов орденами «За храбрость», причем 8 генералов получили ордена по крайней мере двух степеней, а 3 генерала —

ордена всех трех степеней. Сколько орденов вручил маршал?

А.Савин

2. На плоскости расположены две концентрические окружности. Проведена хорда большей

окружности, касающаяся второй окружности. Покажите, что площадь третьей окружности, построенной на этой хорде, как на диаметре, равна площади кольца, образованного первыми двумя окружностями.

А.Павлов

3. Замените буквы цифрами так, чтобы равенство

оказалось верным. Одиаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.

С.Баженов

4. Обозначим через x — наибольшее простое число, меньшее x, а через $\boxed{x}$ — наименьшее простое число, большее x. Чему равно число

Журнал «Mathematics teacher»

5. Пятизначное число A записывается только единицами и двойками, а пятизначное число B — только тройками и четверками. Может ли произведение AB записываться одинаковыми цифрами?

С.Берлов

Иллюстрации Д.Гришуковой

Конкурс «Математика 6—8»

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. В нем могут принять участие как отдельные школьники, так и математические кружки. Конкурс состоит из 20 задач (по 5 задач в каждом номере журнала, начиная с четвертого) и заканчивается в первом номере будущего года. Решения задач из этого номера высылайте не позже 14 января 1998 года по адресу: 117 296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Победители будут награждены премиями журнала, а лучшие математические кружки из принявших участие в конкурсе будут приглашены в летнюю математическую школу

6. В Анчурии в продаже появилось новое средство для похудения – магнитное кольцо, прикрепляемое к носу. Его стоимость – 5 долларов за штуку, но если кто-то покупает сразу пять колец, то шестое ему выдается бесплатно.

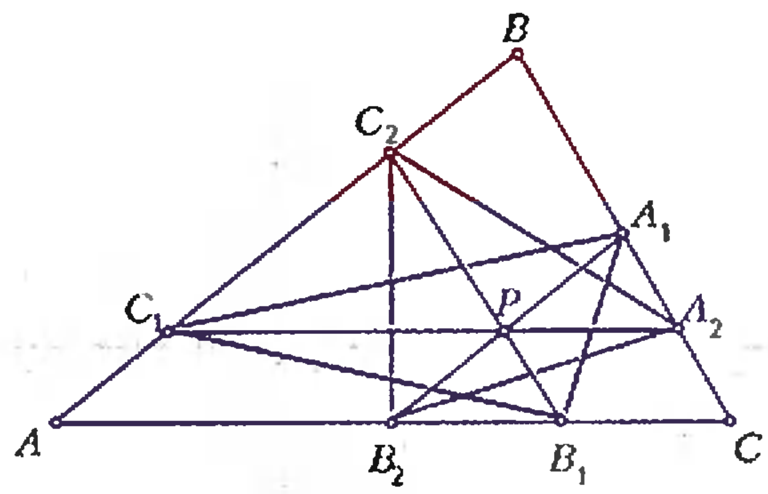
Сложившись, сотрудники одной фирмы приобрели себе такие кольца, что позволило им сэкономить некоторую сумму. Однако затем главный бухгалтер с досадой заметил, что если бы они купили не по одному кольцу, а по два, то каждое кольцо обошлось бы на 1 цент дешевле. А какова была бы экономия, если бы каждый купил по четыре кольца?

И.Акулич

7. В выходной день каждый из учеников класса один раз побывал на катке. Известно, что каждый мальчик встретил там всех своих одноклассниц. Докажите, что в некоторый момент либо все мальчики класса присутствовали на катке, либо все девочки.

В.Дольников, С.Токарев

8. На всех клетках шахматной доски написаны некоторые числа. Разрешается менять местами числа в любых двух соседних (по стороне) клетках, а также заменять числа в любых двух соседних клетках их полусуммами. Докажите, что с помощью таких операций все числа в клетках можно сделать равными.



9. В треугольнике ABC через точку P проведены три отрезка, параллельные сторонам треугольника, как указано на рисунке. Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

В.Произволов

10. В качестве вещественного доказательства при рассмотрении дела об изготовлении фальшивых монет суду были предъявлены 18 монет, изъятых у подсудимого. Суд знает, что настоящие монеты весят одинаково, а фальшивые – также одинаково, но они легче настоящих. Прокурор знает, что ровно 9 монет – фальшивые, причем ему известно, какие именно. Сможет ли он убедить в этом суд, сделав только три взвешивания на чашечных весах без гирь?

С.Токарев

Победители конкурса «Математика 6—8»

Лучших результатов в конкурсе добились следующие математические кружки:

«Эврика» при Харьковском государственном университете, руководители *А.Л.Берштейн, Е.Л.Аринкина, О.Ф.Крыжановский*;
лицея-интерната, Чебоксары, руководитель *С.А.Иванов*;
«Тупоугольник» школы села Кутемели, Татарстан, руководитель *Р.М.Мавлявиев*;
ФМШ-лицея 64, Омск, руководители *А.С.Штерн, А.А.Проценко, Н.И.Храмова*;
школы 10, Красноярск, руководитель *Ю.В.Безгачева*;
при Ивановском энергетическом университете, руководитель *С.И.Токарев*;
ФМШ, Астрахань, руководитель *Н.И.Виноградова*;
Политехнического лицея 2, Ангарск, руководитель *В.М.Гоголева*;
Школа юного математика при Ярославской ЗМШ, руководитель *С.Г.Волченков*;
ФМГ 17, Винница, руководитель *О.В.Макеева*;
школы- лицея 90, Краснодар, руководитель *З.А.Дегтярева*;
Университета Наяновой, Самара, руководители *В.С.Исаханова, А.А.Андреев, А.Н.Савин*;
при Кильмезском Доме творчества, п.Кильмезь Кировской обл., руководитель *П.М.Глушков*;
«Олимпионик», Саров, руководители *И.Т.Шморин, Н.А.Широкова, Г.И.Калашникова*.

Кроме того, победителями конкурса стали следующие школьники:

Гайфуллин Александр – Жуковский Московской обл. с.ш.10, 8 кл.,
Берштейн Михаил – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Полякова Людмила – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Дремов Владимир – Волгодонск, с.ш.24, 8 кл.,
Горбачев Алексей – Москва, с.ш.1279, 7 кл.,
Мануйлович Иван – Жуковский Московской обл., с.ш.7, 7 кл.,

Миссаров Азим — Казань, школа-гимназия 7, 7 кл.,
Горелов Сергей — Челябинск, с.ш.31, 8 кл.,
Дзиов Батраз — Владикавказ, с.ш.29, 7 кл.,
Аввакумов Сергей — Севастополь, гимназия 7, 5 кл.,
Плиев Зелим — .Владикавказ, школа точной мысли, 7 кл.,
Исанбаев Павел — Ижевск, лицей 41, 8 кл.,
Черниговская Александра — п.Белозерский Воскресенского р-на Московской обл., с.ш.18, 7 кл.,
Петрова Анна — Ижевск, с.ш.30, 8 кл.,
Беляев Дмитрий — Переславль-Залесский, с.ш.7, 7 кл.,
Внуков Артем — Жуковский Московской обл., с.ш.14, 7 кл.,
Бердинский Дмитрий — Новосибирск, с.ш.92, 8 кл.,
Шамсиев Радик — с.Илексаз Сармановского р-на, Татарстан, 8 кл.,

Жюри конкурса также отмечает хорошие работы следующих школьников:

Травкина Романа — Липецк, с.ш.5, 6 кл.
Доменской Ирины — Новосибирск, гимназия 3, 8 кл.
Жигалкиной Екатерины — Комсомольск-на-Амуре, 7 кл.,
Зарубиной Елены — Комсомольск-на-Амуре, 7 кл.,
Клапчук Марии — Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,
Семенова Андрея — Саров, с.ш. 15, 7 кл.,
Алферова Романа — Челябинск, ФМЛ 31, 8 кл.,
Иоголевича Евгения — Челябин, ФМЛ 31, 8 кл.,
Джапмулдаева Ерлана — Кзыл-Орда, Казахстан, с.ш. 235, 8 кл.,
Ляхова Федора — Нижний Новгород, с.ш. 40, 6 кл.,
Копейки Анны — Одесса, Ришельевский лицей, 8 кл.,
Кобзева Владимира — Межгорье Белорецкого р-на, Башкирия,
Обухова Петра — Одесса, Приморский лицей, 8 кл.,

а также кружков:

7 кл. школы-гимназии 10, Ангарск, руководитель *Л.В.Шварева,*
Дома технического детского творчества, Краснодар, руководитель *И.В.Федоренко,*
школы-гимназии 44, Пенза, руководитель *А.И.Пендюрин.*

Все победившие кружки и школьники награждаются призами, а победившие кружки приглашаются в летний математический лагерь.

На часок к семейке репьюнитов

Б.КОРДЕМСКИЙ

Среди авторов научно-популярных и учебных книг по математике для юношества не так много имен, хорошо знакомых нескольким поколениям людей. Из них имя Бориса Анастасьевича Кордемского — одно из самых известных. Если ваши родители, будучи школьниками, хоть немного увлекались математикой — спросите их, кто этот человек. И вы обязательно услышите в ответ: «Как же, как же, это автор «Математической смекалки». Чудесная, между прочим, была книга!».
Но эта книга не только была, она и есть. Появившись впервые в 1954 году, «Математическая смекалкам постоянно совершенствовалась, выходила снова и снова с завидной периодичностью (три года назад вышло ее 10-е издание) и неизменно привлекала интерес молодежи. Как, впрочем, и многие другие книги этого автора. Продолжая замечательные традиции нашей педагогики, Б.А.Кордемский внес существенный вклад в золотой фонд российской литературы для школьников по занимательной математике.
Патриарху среди популяризаторов математики исполнилось 90 лет. Редколлегия журнала «Квант», сама воспитанная на его книгах и восхищенная его талантом, искреннее желает Борису Анастасьевичу доброго здоровья и новых изданий — для молодой поросли любителей математики.
Предлагаем вниманию читателей небольшой отрывок из готовящейся к печати новой книги замечательного математического сказочника.

СЕМЕЙКА репьюнитов $R(b, n)$ — это натуральные числа, запись которых в любой системе счисления с основанием $b > 1$ состоит только из единиц. Репьюниты в десятичной системе обозначаются короче, R_n: $R_1 = 1$, $R_2 = 11$, $R_3 = 111$, $R_4 = 1111$, ...

«Фамилия» этого семейства — *Repunit* — образована слиянием двух английских слов: *«repeated unit»* (повторенная единица).

Обнаружено немало интересных свойств репьюнитов, но также немало и не разгаданных еще. Например, в семействе репьюнитов (R_n) выявлено пока только 5 простых чисел: R_2, R_{19}, R_{23}, R_{317} и R_{1037}.

Живописна табличка простых делителей начальной последовательности составных репьюнитов:

$$111 = 3\cdot 37,$$
$$1111 = 11\cdot 101,$$
$$11\,111 = 41\cdot 271,$$
$$111\,111 = 3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37,$$
$$1\,111\,111 = 239\cdot 4649,$$
$$11\,111\,111 = 11\cdot 73\cdot 101\cdot 137,$$
$$111\,111\,111 = 3\cdot 37\cdot 333667.$$

В результате умножения $R_i\cdot R_j$ при $9\geq i\geq j$ получается палиндромическое число вида $(12\ldots j\ldots 21)$ из $i+j-1$ цифр с цифрой j посредине. (*Палиндромом* называется натуральное число, запись которого совпадает с записью своего зеркального отражения.)

Примеры:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}11111\\111\end{array}\\ \hline 1233321\end{array} \qquad 111^2 = 12\,321.$$

Если $i\geq j>9$, то $R_i\cdot R_j$ — не палиндром.

Задачи (из «семейной хроники» репьюнитов):

1. Какими цифрами следует заменить буквы, чтобы сумма девяти слагаемых стала равной репьюниту?

$$\begin{array}{r} \text{РЕПЬЮНИТ}\\ \text{РЕПЬЮНИТ}\\ \text{РЕПЬЮНИТ}\\ \text{РЕПЬЮНИТ}\\ +\ \text{РЕПЬЮНИТ}\\ \text{РЕПЬЮНИТ}\\ \text{РЕПЬЮНИТ}\\ \text{РЕПЬЮНИТ}\\ \text{РЕПЬЮНИТ}\\ \hline \end{array}$$

2. Произведением каких двух репьюнитов является число

$$123455554321?$$

3. В прошлом месяце сумма, вырученная фирмой от продажи партии новых мини-автомобилей, составила 1111111 долларов. Если каждый автомобиль имел одну и ту же цену, то сколько их было продано?

4. Какие цифры заменены буквами в десятичной записи произведения?

$$\begin{array}{c} \text{RRRRRRR}\\ \underline{\text{RRRRRRR}}\\ \text{REPUNITINUPER} \end{array}$$

5. Дайте рекуррентное определение репьюнита.

6. Являются ли взаимно простыми два репьюнита, номера (n) которых а) последовательные числа, б) последовательные нечетные числа, в) последовательные четные числа?

7. Какие репьюниты в системе счисления с четным основанием будут нечетными, а в системе счисления с нечетным основанием будут четными?

8. Когда к цифре 2 прижимаются n единиц слева и n единиц справа, то образуется палиндромическое число

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ единиц}}2\underbrace{1\ldots11}_{n\text{ единиц}}$$

— репьюнит с проникшей в его сердцевину двойкой. Докажите, что при всяком значении n это число — не простое. Так, в частности, при $n=1$ имеем

$$121 = 11\cdot 11,$$

при $n=2$ имеем

$$11211 = 111\cdot 101.$$

Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Вращение: реки, тайфуны, молекулы» предназначена девятиклассникам, заметка «Эстафетный бег молекул, или Как работает термос» — десятиклассникам, «Атомный лазер» — одиннадцатиклассникам.

Вращение: реки, тайфуны, молекулы

А.СТАСЕНКО

А ЧТО между ними — реками, тайфунами, молекулами — общего? Разве только то, что всё состоит из молекул? Однако, их объединяет и нечто другое (о чем мы собираемся поговорить) — явление, которое возникает при движении во вращающейся системе координат и которое связано с так называемыми *ускорением Кориолиса* и *силой Кориолиса*. Именно эта сила делает одни берега рек крутыми, другие — пологими, закручивает тайфуны и даже... вторгается во внутреннюю «жизнь» молекул. Итак...

Рассмотрим два соседних кольцевых пояса на поверхности Земли, связанных с географическими параллелями θ_1 и θ_2. Эти два пояса отмечены на рисунке 1 разными цветами. Понятно, что чем больше широта θ, тем меньше линейная (окружная) скорость ($v_2 < v_1$). Например, на полюсе ($\theta = 90°$) она вообще равна нулю.

Пусть в северном полушарии река Некая течет с юга на север вдоль меридиана, т.е. перпендикулярно параллелям. Частицы воды при «пересадке» с параллели θ_1 на θ_2 по инерции стремятся сохранить скорость v_1 (направленную к востоку) и, если бы поверхность Земли была гладкой и скользкой, они, попав на широту θ_2, отклонились бы *вправо* (пунктир на рисунке 1), т.е. к востоку. Земной наблюдатель сказал бы, что на частицы воды действует сила, перпендикулярная скорости их движения, — уже упомянутая кориолисова сила (Гюстав Гаспар Кориолис, 1829 г). Но уж если река течет в своем русле, то эти частицы воды будут ударяться о правый берег (ведь он движется к востоку со скоростью $v_2 < v_1$) и, следовательно, будут постепенно его разрушать.

Если мы рассмотрим реку Такую-то, текущую с севера на юг, то убедимся, что она стремится отклониться к западу, но относительно своего движения опять же *вправо*.

Вот почему у всех меридиональных рек в северном полушарии правые берега крутые, левые — пологие. (И, конечно, уровень воды у правого берега всегда несколько выше, чем у левого.) Очевидно, что в южном полушарии меридиональные реки будут размывать *левые* берега.

Этот географический факт был сформулирован выдающимся естествоиспытателем Карлом Бэром (1857 г.) с учетом своих собственных и более ранних наблюдений русских исследователей (начиная с 1826 г.). При этом он верно объяснил подмеченное явление влиянием вращения Земли.

Особенно ярко действие кориолисовой силы проявляется при движении масс воды и воздуха в океане и атмосфере. Ну кто не знает, что самое знаменитое океанское течение Гольфстрим (направленное на север в северном полушарии) отклоняется *вправо*, обездоливая теплом Канаду и обогревая Европу! Ведь это та же река, только без берегов.

А как образуются тайфуны — грозные атмосферные явления глобального масштаба (с характерным диаметром порядка тысячи километров), — производящие колоссальные разрушения? Пусть из-за неравномерного нагрева Солнцем поверхности Земли и атмосферы где-то образуется область пониженного давления (барометр «падает», что очень неприятно для моряков). К ней радиально устремляются воздушные массы из соседних областей высокого давления. Но, как мы уже знаем, все эти движущиеся массы, вследствие вращения Земли, стремятся отклониться вправо в северном полушарии или влево — в южном. В результате возникает колоссальный вихрь, в котором массы воздуха вращаются против часовой стрелки в северном полушарии (рис.2) или по часовой — в южном.

Перейдем теперь к молекулам, а именно — к молекулам газа. Известно, что они не только хаотически мечутся во всех направлениях между столкновениями друг с другом, но еще и быстро вращаются, причем энергия их вращательного движения того же порядка, что и энергия поступательного перемещения. А кроме того, при определенных условиях части молекул (например, атомы или в очень сложных молекулах группы атомов — радикалы) могут колебаться относительно центра масс (центра тяжести) молекулы, и опять же энергия этих колебаний того же порядка, что энергия поступательного и вращательного движений. (В физике этот факт называется принципом равнораспределения энергии по степеням свободы — но это лишь к слову.)

Рассмотрим простейшую модель трехатомной молекулы, имеющей два одинаковых атома: одинаковые атомы соединены гибкими невесомыми пружин-

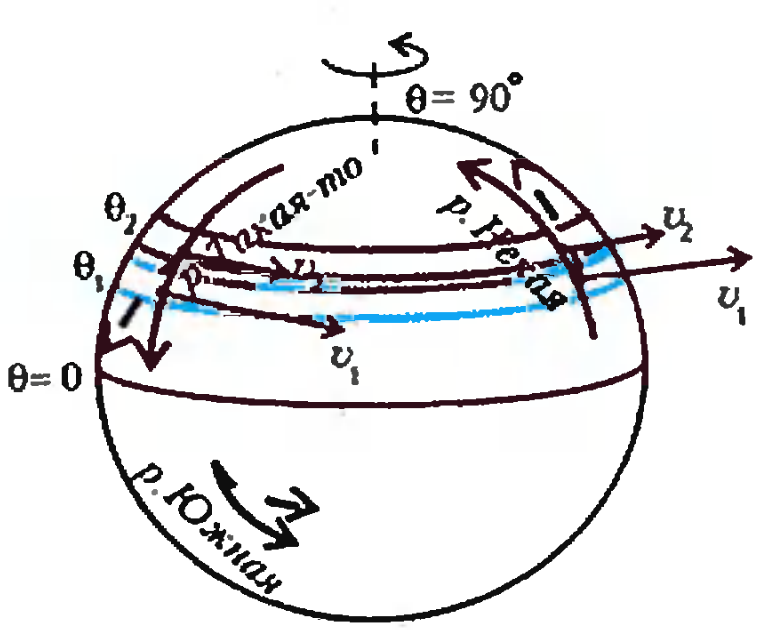


Рис. 1

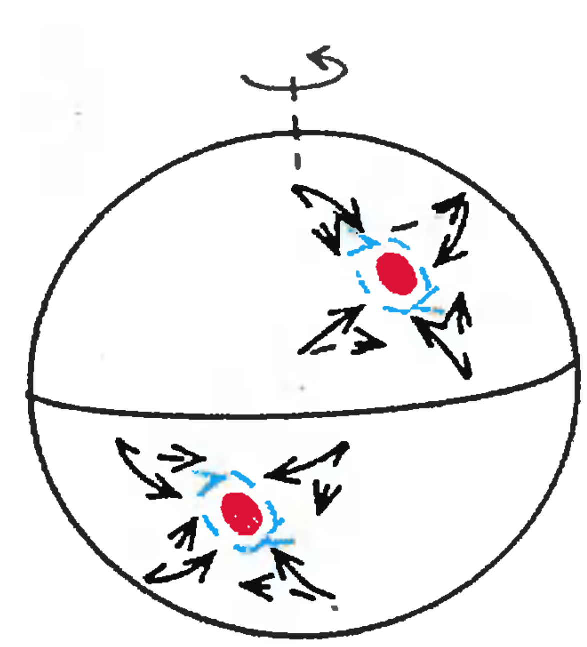


Рис. 2

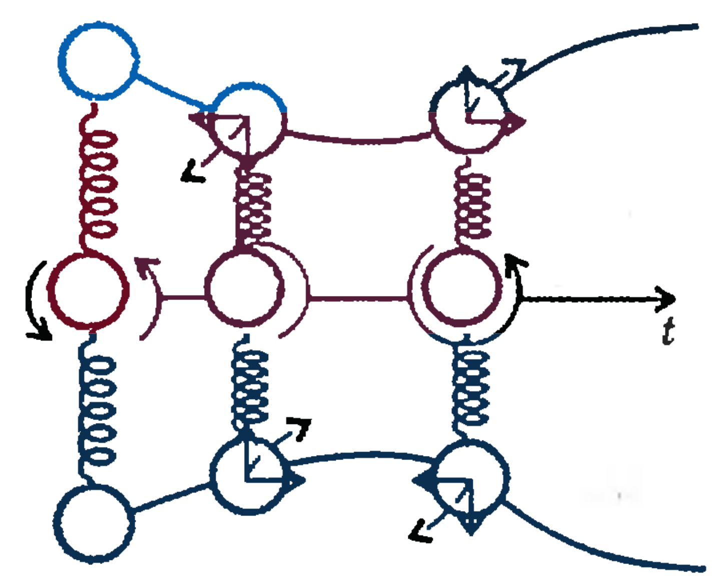


Рис. 3

ками с третьим центральным атомом (рис.3, 4). Например, это может быть молекула углекислого газа CO_2, очень важная для работы мощных инфракрасных лазеров. Если такая молекула ни с чем не взаимодействует, ее центр масс движется по прямой линии. Направим ось времени вправо и будем следить за движением ее атомов в системе координат, вращающейся вокруг центра масс, — аналогично тому, как мы рассматривали движение рек, океанских течений и воздушных масс на вращающейся Земле.

Возможны два случая колебаний (как говорят физики, две моды): 1) крайние атомы движутся одновременно по направлению к центру масс или от него, т.е. обе пружинки одновременно сокращаются или удлиняются; 2) крайние атомы движутся одновременно в одну и ту же сторону — тогда одна из пружинок сокращается, а другая удлиняется. Можно показать, что в первом случае (см. рис.3) происходит либо ускорение, либо замедление вращения. Например, при встречном движении атомов к центру на них действуют силы Кориолиса, отклоняющие их вправо (относительно их движения к третьему атому) и, следовательно, ускоряющие вращение. При удалении крайних атомов от центра масс силы Кориолиса тоже отклоняют их вправо, но теперь это приводит к замедлению вращения. Точно так же фигурист на льду вращается быстрее, прижимая руки к телу. (К слову, эти явления связаны и с так называемым законом сохранения момента импульса).

А вот во втором случае наблюдается нечто еще более интересное (см. рис.4). Когда крайние атомы молекулы одновременно движутся в одну сторону, силы Кориолиса тоже отклоняют их вправо, но одна из них стремится ускорить вращение относительно центра масс, а другая — замедлить, в результате молекула изогнется. Через четверть периода колебаний явление повторится, но теперь уже молекула будет изогнута в другую сторону. Значит, колебания атомов во вращающейся молекуле приводят к дополнительным изгибным колебаниям. Но поскольку энергии и, значит, скорости движения колебательного и вращательного движений одного порядка (как уже было сказано), их

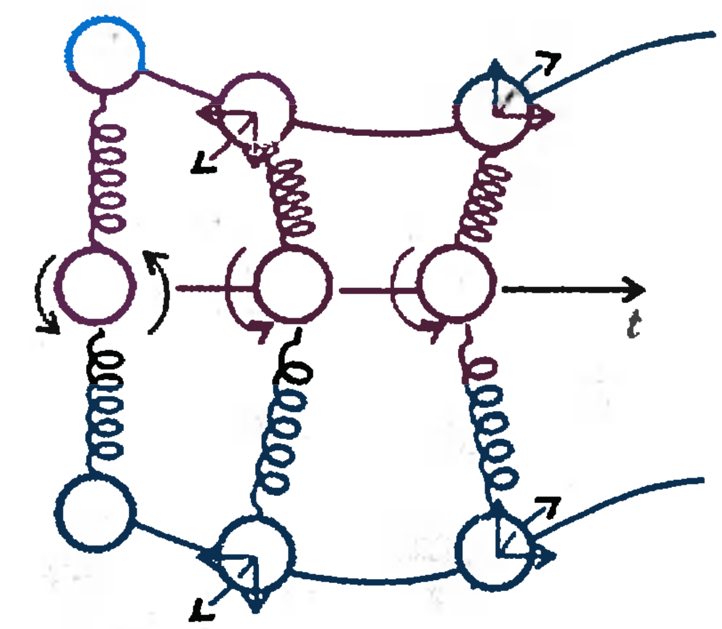


Рис. 4

периоды и частоты могут оказаться близкими друг другу, так что дело пахнет *резонансом*. И поскольку молекулы излучают, все это обязательно скажется на спектре их инфракрасного излучения. Что и наблюдают физики-спектроскописты. (Заметим, что во втором случае колебания крайних атомов и изгибы «пружинок» приведут к тому, что и центральный атом тоже станет как-то перемещаться относительно центра масс, но это не повлияет на рассмотренную нами качественную картину явлений.)

Итак, всюду — даже у рек, тайфунов и молекул — можно найти нечто общее. Ищите да обрящете.

Эстафетный бег молекул, или Как работает термос

А.ЧЕРНОУЦАН

Каждый понимает, как утроен термос. Особенно тот, кто хоть раз ронял колбу от термоса на пол, — звук примерно такой же, как от лопнувшей лампочки. И причина та же — и в лампочке, и в колбе давление гораздо ниже атмосферного, поэтому, кроме звона стекла, мы слышим громкий хлопок воздуха.

Если между стенками колбы находится не воздух, а вакуум, то, на первый взгляд, все понятно. Даже воздух довольно плохой проводник тепла — вспомните оконные рамы, — а уж в вакууме-то проводить тепло совсем нечему. (Есть еще один механизм потери энергии горячим телом — излучение, и в чистом вакууме этот механизм не только основной, но и единственный, но мы от него отвлечемся и сосредоточимся на «эффекте термоса».) На самом деле в колбе находится не чистый, а так называемый технический вакуум, т.е. сильно разреженный, но все же воздух. Возникает вопрос — а насколько сильно надо этот воздух откачивать? Ведь чем выше требования к степени разреженности, тем труднее такую колбу сделать.

Постараемся ответить на этот вопрос, но прежде обсудим, как происходит передача энергии от более горячей стенки к более холодной, если между ними находится разреженный воздух.

Молекулы воздуха, которые ударяются о горячую стенку, приобретают от молекул стенки избыточную энергию. В среднем энергия отлетающих от этой стенки молекул становится равной $\alpha k T_1$, где k — постоянная Больцмана, T_1 — абсолютная температура горячей стенки, а α — коэффициент порядка единицы (для оценок достаточно положить $\alpha = 1$). От холодной стенки молекулы отлетают со средней энергией $\alpha k T_2$, где T_2 — температура холодной стенки. Если бы о холодную стенку ударялись те самые молекулы, которые отлетают от горячей, то за единицу времени от горячей стенки к холодной передавалась бы энергия $\alpha k (T_2 - T_1) Z$, где Z — число молекул, ударяющихся о стенку за одну секунду.

Для оценки этого числа молекул будем для простоты считать, что все моле-

(Окончание см. на с. 34)

Такой пар я назвал «газ», потому что он почти не отличается от «хаоса» древних.

Ян Баптист ван Гельмонт

...я уже предложил закон, согласно которому молекулы различных газов имеют равную живую силу < кинетическую энергию — А.Л. > поступательного движения.

Рудольф Клаузиус

В качестве исследуемого тела... берется самое простое, а именно газ, заключенный между твердыми, абсолютно упругими стенками, молекулы которого представляют собой жесткие, абсолютно упругие шары...

Людвиг Больцман

А ТАК ЛИ ХОРОШО ЗНАКОМ ВАМ

идеальный газ?

Конечно же, вы заметили, что авторы высказываний, стоящих в эпиграфе, так или иначе подступали именно к понятию идеального газа. Между первым высказыванием (голландского естествоиспытателя) и последним (австрийского физика) — путь длиной в два с половиной столетия. Путь, протоптанный древними атомистами, но отнюдь не завершенный и сегодня. Путь, вобравший в себя необыкновенно обширную географию профессий и имен. Путь, на который один за другим становились, помимо названных, такие знаменитости, как Ньютон, Гук, Гюйгенс, Лаплас, Лавуазье, Бойль, Д.Бернулли, Джоуль, Максвелл, Перрен, Эйнштейн...

Чем же так притягательна модель идеального газа?

Наверное, прежде всего, возможностью, опираясь на простые исходные представления, построить теорию, имеющую поразительно широкие следствия. Разумеется, и тем, что она проявила огромные резервы абстрактного, модельного мышления, все более завоевывающего сегодня не только научно-технические, но даже и бытовые области. От обычных газов модель «перекинулась» к электронному «газу» в металлах, к описанию излучения, электромагнитных волн и даже... к звуковым колебаниям атомов кристаллов. Все это — свидетельства необычной универсальности, поставившей модель идеального газа в ряд немногих фундаментальных моделей, с помощью которых создается физическая картина мира.

Итак, представим себе, что нас окружают идеальные газы...

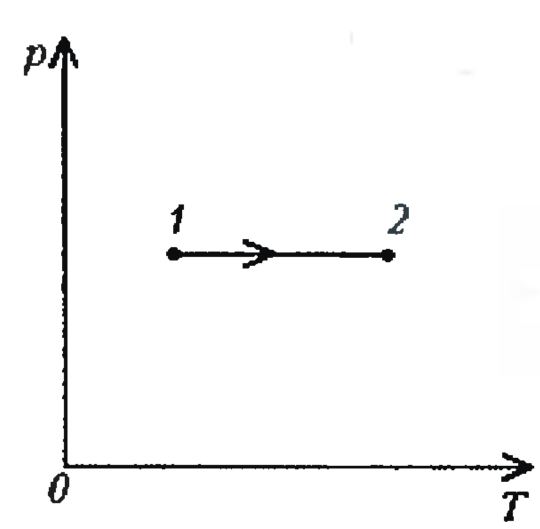
Вопросы и задачи

1. Сила тяжести на Луне меньше, чем на Земле. Почему же на Земле пыль долго удерживается над ее поверхностью, а на Луне она быстро оседает?

2. Одинаковы ли парциальные давления азота в безветренную теплую погоду над участками влажной и сухой почвы?

3. Сколько термодинамических параметров задают состояние конкретного идеального газа определенной массы?

4. Идеальный газ перевели из состояния *1* в состояние *2*, как показано на рисунке. Как изменилась плотность газа?



5. Сосуд разделен на две секции пористой перепонкой. В одну секцию вводится водород, в другую — воздух, причем при одинаковых давлениях. Чем объяснить, что вначале перепонка выгибается в сторону секции с водородом, а спустя какое-то время принимает прежнее положение?

6. Два одинаковых по объему закрытых сосуда заполнены углекислым газом, причем высота первого сосуда в два раза меньше высоты второго. Манометры, установленные наверху сосудов, показывают одно и то же давление p. Что покажут манометры, если сосуды перевернуть?

7. Атмосферное давление обусловлено весом воздуха. Как же поддерживается нормальное давление в кабине космонавта, если воздух в ней невесом?

8. Одинаковые ли давления оказывает воздух на пол и потолок комнаты?

9. Зависит ли давление газа на стенку сосуда от качества обработки стенки?

10. В сосуде находится смесь азота и неона. Одинаковы ли средние кинетические энергии молекул этих газов?

11. Стенки сосуда поддерживаются при различных температурах. Зависит ли давление газа на стенку сосуда от ее температуры?

12. Идеальный газ занимает половину теплоизолированного сосуда, в другой половине которого вакуум. Что произойдет с температурой газа, если мгновенно убрать разделительную перегородку?

13. Цилиндрический теплоизолированный сосуд с идеальным газом подвешен на нити. Нить обрывается, и сосуд падает. Изменится ли температура газа во время падения?

14. Движущийся сосуд, содержащий некоторую массу идеального газа, внезапно останавливается. Что произойдет с давлением газа в сосуде?

15. Увеличивает ли сильный ветер температуру переносимого им воздуха?

Микроопыт

Включите в комнате нагреватель. Согревшись, подумайте, что вы почувствовали: увеличение внутренней энергии воздуха в комнате или возрастание энергии каждой молекулы? Может быть, это одно и то же?

Любопытно, что...

...придуманное Гельмонтом в начале XVII века слово «газ» довольно долго не употреблялось, оно было возрождено знаменитым Лавуазье лишь в конце XVIII века и широко распространилось во времена полетов братьев Монгольфье на первых воздушных шарах.

...универсальная модель «совершенного газа» была предложена в 1842 году французским физиком и химиком Анри Реньо. Термин же «идеальный газ» ввел в 1854 году Клаузиус.

...хотя законы Авогадро и Дальтона имеют вроде бы самостоятельные значения, нетрудно показать, что закон Дальтона является прямым следствием закона Авогадро и оба закона вытекают из молекулярно-кинетической теории идеального газа.

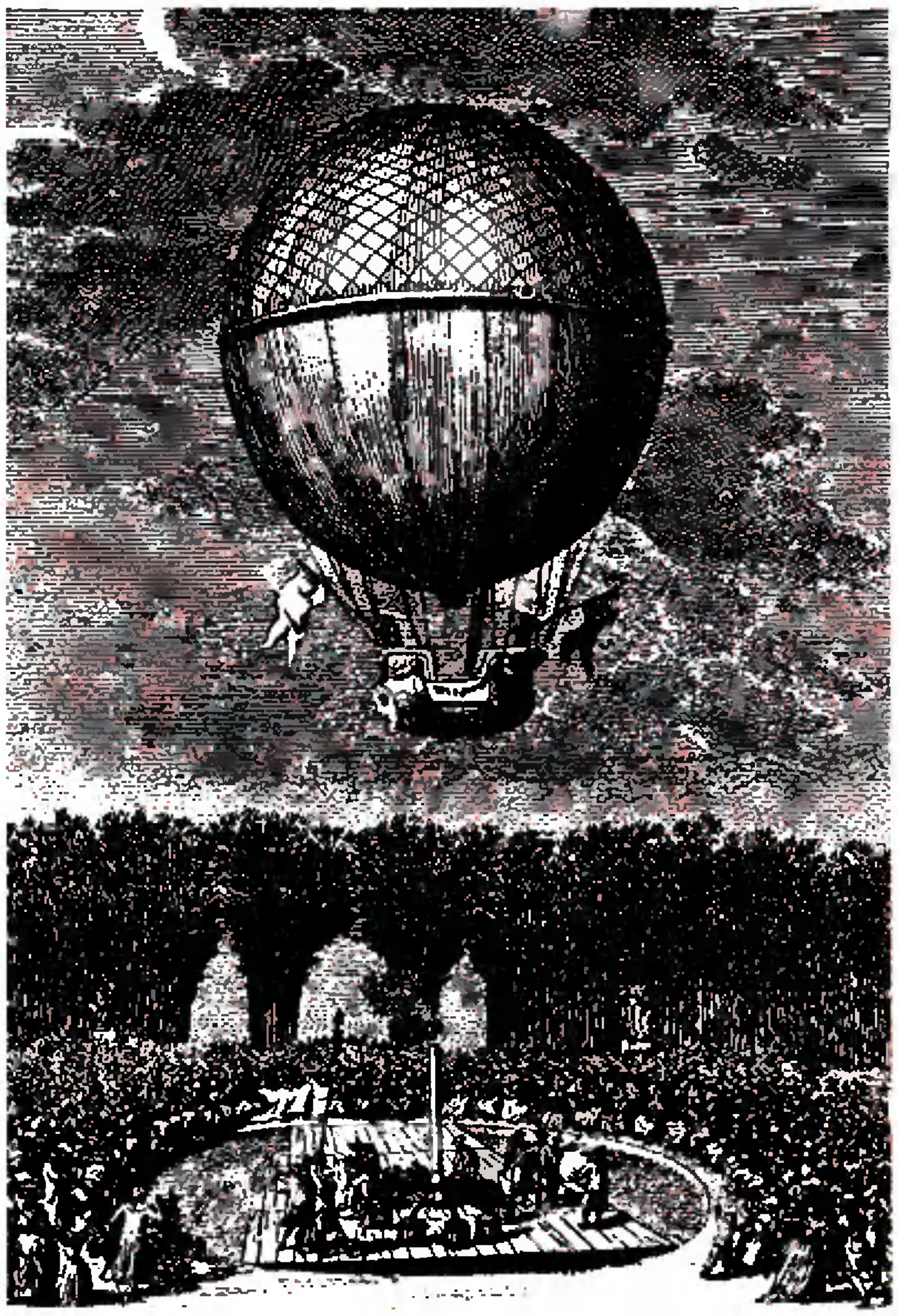
...оценки постоянной Авогадро, сделанные на основе теории идеального газа, уступали по точности вычислениям, опирающимся на модель реального газа, например расчетам Ван-дер-Ваальса.

...молекулярно-кинетическая теория идеального газа приводит к обоснованию экспериментально установленного факта равенства молярных теплоемкостей газов одного типа — скажем, одноатомных или двухатомных.

...многие положения кинетической теории газов долгое время ждали своего опытного подтверждения. Так, лишь в 1911 году французский физик Дюнуайе поставил эксперимент, в котором показал, что молекулы газа беспрестанно сталкиваются друг с другом, а между столкновениями движутся прямолинейно.

...вывести столь известное теперь уравнение состояния газа (или объединенный газовый закон) Клапейрона побудила работа по «реанимации» труда Сади Карно, незаслуженно остававшегося в тени в течение десяти лет.

...модель идеального газа «работает» и при обсуждении закона осмотического давления, установленного в конце прошлого века голландским химиком Вант-Гоффом. Рассчитывая это давление как для газа, состоящего из растворенного вещества, можно понять, например, почему при растворении 20 граммов сахара в литре воды возникает давление, способное уравновесить водяной столб высотой 14 метров.



...теория идеального газа позволяет оценить давление и температуру даже внутри звезд. Результаты таких оценок при всей их приблизительности весьма близки к полученным строгими расчетами. Так, согласно оценкам, давление газа в недрах Солнца оказывается в миллиарды раз выше нормального атмосферного, а температура там составляет миллионы градусов.

...для комнатных температур модель идеального газа начинает «хромать» уже при плотностях, лишь в 100 раз превышающих плотность газа при нормальных условиях.

...в работах Максвелла по кинетической теории газов впервые в описание физических явлений вошла статистика — иначе было бы невозможно получить общую картину поведения газа как огромного ансамбля частиц.

...газ без столкновений молекул может существовать не только в идеальной модели, но и в действительности. Это так называемый кнудсеновский газ — газ, находящийся при столь низком давлении, что его молекулы сталкиваются только со стенками сосуда. Особые свойства истечения такого газа через малое отверстие используются, например, при разделении изотопов.

...в последнее время идеальный газ стал «действующим лицом» в компьютерном моделировании. Благодаря возможностям ЭВМ, удается наблюдать переход от упорядоченного движения «газа шаров» к хаотическому, выяснить причины возникновения «молекулярного хаоса» — в конечном счете, перейти к описанию явлений случайных, слабо поддающихся детальным расчетам.

Что читать в «Кванте» об идеальном газе

(публикации последних лет)

1. *«Идеальный газ — универсальная физическая модель»* — 1991, №9, с.33;
2. *«Пока вода испаряется...»* — 1991, №11, с.31;
3. *«Ах, уж эта влажность»* — 1992, №11, с.35;
4. *«Расширение газа в пустоту»* — 1995, №1, с.37;
5. *«Когда кипит вода?»* — 1995, №2, с.43;
6. *«Кладовые энергии молекулы»* — 1995, №5, с.37;
7. *«Осмос и... вечный двигатель»* — 1995, №5, с.42;
8. *«Аэро- и гидродинамика»* — 1996, №3, с.53;
9. *«Откуда берутся облака?»* — 1996, №5, с.40;
10. *«Теплоемкость идеального газа»* — 1997, №2, с.45;
11. *«Эстафетный бег молекул, или Как работает термос»* — 1997, №5, с.31.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 30)

кулы движутся с одной и той же скоростью v, причем в направлении от горячей стенки к холодной летит 1/6 часть молекул (это — одно из направлений вперед — назад, вверх — вниз или вправо — влево) и 1/6 часть летит навстречу. Остальные молекулы в этой модели летят параллельно стенкам. Если концентрация молекул воздуха n, то за единицу времени о площадку S ударятся

$$Z = \frac{1}{6} nvS$$

молекул. Так как скорость зависит только от температуры (напомним, что средняя квадратичная скорость равна $v = \sqrt{3kT/m}$, где m — масса молекулы), то в предположении, что молекулы летят от горячей стенки прямо к холодной и бережно доносят до нее всю избыточную энергию, поток энергии от стенки к стенке (т.е. энергия, переносимая за единицу времени), равный

$$P = \alpha k(T_1 - T_2)Z = \frac{1}{6}\alpha knvS(T_1 - T_2),$$

оказывается пропорциональным не только площади и разности температур, но и концентрации молекул, а значит, и давлению газа $p = nkT$. Таким образом, чем ниже плотность газа и его давление, тем хуже он проводит тепло.

Однако все это правильно только для очень разреженного газа. В обычном газе любая молекула до соударения с другой молекулой пролетает расстояние значительно меньшее, чем расстояние между стенками. Можно сказать, что передача энергии от стенки к стенке происходит эстафетным способом. (Мы отвлекаемся от передачи энергии с помощью конвекции — в узком промежутке между стенками колбы термоса конвекция несущественна.) Температура молекул между стенками линейно уменьшается от T_1 до T_2, и энергия передается по цепочке — от более «горячих» молекул к более «холодным». Но эстафетный способ менее эффективен, чем прямой, — ведь к холодной стенке подлетают не молекулы от горячей стенки, несущие полный запас избыточной энергии, а молекулы из близлежащих, более холодных областей.

Чтобы оценить влияние соударений между молекулами, введем среднюю длину свободного пробега, которую обозначим λ. Как видно из названия, это есть не что иное, как среднее расстояние, которое молекула проходит между двумя соударениями. Будем для простоты считать, что все летящие от

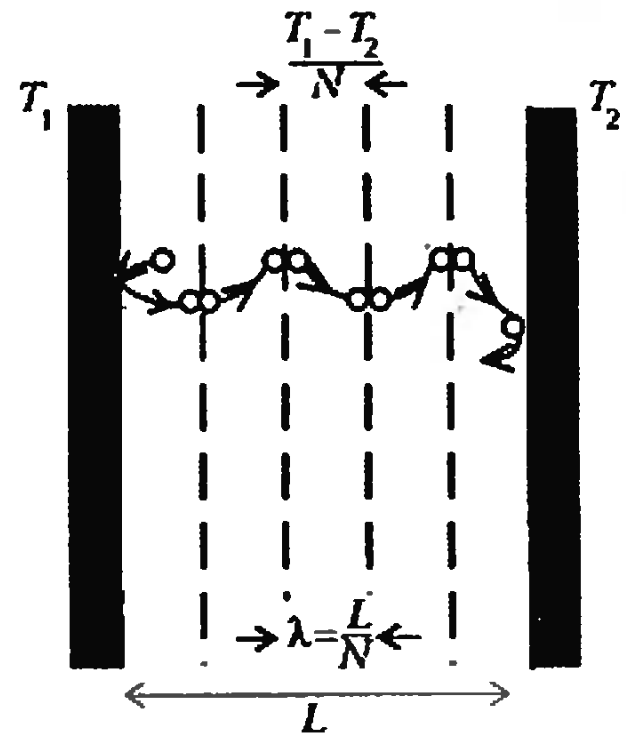


Рис. 1

стенки к стенке молекулы испытывают соударения, пролетев расстояние λ. Тогда расстояние между стенками L разделится на $N = L/\lambda$ областей (рис.1), причем избыточная энергия летящих по направлению к холодной стенке молекул определяется температурой той плоскости, где произошло последнее столкновение, т.е. постепенно уменьшается от области к области. Переносимая через каждый слой энергия равна разности энергий молекул, которые летят к холодной стенке и которые летят им навстречу. Так как разность температур между «стенками» области равна $(T_2 - T_1)/N$, то поток энергии между ними равен

$$P_N = \alpha kZ\lambda\frac{T_1 - T_2}{L} = \frac{1}{6}\alpha knvS\lambda\frac{T_1 - T_2}{L}.$$

Осталось понять, от чего и как зависит длина свободного пробега. Представим все молекулы шариками диаметром d и будем считать, что движется только одна молекула, а остальные молекулы хаотически разбро-

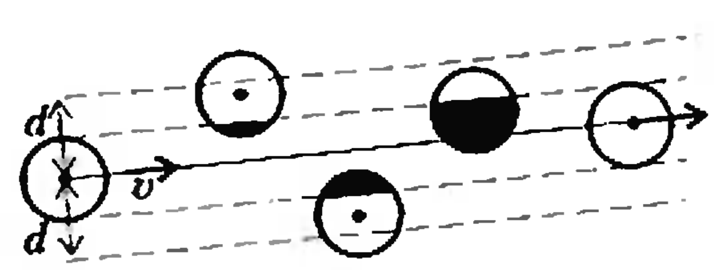


Рис. 2

саны по объему, неподвижны и, более того, как бы «прозрачны» для выделенной молекулы. Посчитаем, сколько молекул она «не заметила» за одну секунду (хотя должна была с ними столкнуться), пролетев расстояние v. Нетрудно понять, что наша молекула задела бы все шарики, центры которых окажутся на расстоянии меньшем d от линии движения ее центра (рис.2), т.е. которые попадут в цилиндр радиусом d и высотой v. Число таких центров равно $n(\pi d^2 v)$. Значит, среднее расстояние между соударениями равно

$$\lambda = \frac{v}{n\pi d^2 v} = \frac{1}{n\pi d^2}.$$

Длина свободного пробега оказалась обратно пропорциональной концентрации молекул.

Поскольку поток энергии между стенками зависит от произведения $n\lambda$, получается, что при постоянной температуре поток энергии от стенки к стенке не зависит ни от плотности газа, ни от его давления. Этот парадоксальный и неожиданный результат был впервые предсказан Дж.Максвеллом, и его экспериментальное подтверждение было важным успехом молекулярно-кинетической теории.

Но как же термос? Выходит, что, сколько ни откачивай воздух, никакого толка не будет? Не волнуйтесь, с термосом все в порядке. Чем больше мы откачиваем воздух, тем больше становится длина свободного пробега. Когда она превысит расстояние между стенками L, вступит в действие прямой способ передачи энергии — непосредственно от стенки к стенке, при котором, как мы убедились, поток энергии пропорционален плотности газа (и не зависит от расстояния между стенками).

Оценим, до каких давлений надо добраться. Если $\lambda \approx L$, то $n \approx 1/(\pi d^2 L)$. Пусть расстояние между стенками L = 3 мм, а диаметр молекул (из таблиц) $d \approx 3 \cdot 10^{-10}$ м. Тогда для температуры T = 300 К получим $p = nkT \approx 5$ Па. Только с этого давления начнется уменьшение теплопроводности. Например, при давлении 0,1 Па поток тепла будет в несколько десятков раз меньше, чем без откачки. Но это давление в миллион раз меньше, чем атмосферное.

Один мой знакомый предложил применить принцип работы термоса для утепления окон. Достаточно откачать воздух между рамами, — убеждал он, — и тепло через стекла уходить не будет. Я возразил, что при сильной откачке трудно (и дорого) будет обеспечить герметичность, но главное — стекла будут со страшной силой прижиматься друг к другу атмосферным давлением. (Оцените сами, какие возникнут нагрузки.) А зачем сильно откачивать? — ответил автор проекта, — откачаем немного, и уже станет лучше!

Теперь вы знаете, как ему возразить?

Атомный лазер

А.СЕМЕНОВ

Американские физики из Массачусетсского технологического института создали первый в мире атомный лазер, который создает пучки атомов, а не света.

Слово «лазер», вошедшее в обиход тридцать с лишним лет назад, означает устройство, выдающее поток квантов света — фотонов, причем все они абсолютно одинаковые и «шагают в ногу». Для таких фотонов-близнецов есть специальный научный термин — когерентные фотоны. Они существенно отличаются от тех, что летят от Солнца или обычной лампочки накаливания. Например, возможно создать очень интенсивные пучки лазерных фотонов. Теперь физикам удалось существенно продвинуться на лазерном фронте: они создали аналогичный пучок атомов. Атомный лазер может применяться в самых разных областях — от сверхточных атомных часов до микросхем.

Чтобы сделать такой лазер, группе физиков под руководством Вольфганга Кеттерле пришлось создать новое состояние вещества — конденсат Бозе — Эйнштейна (существование его предсказали в 1920 году А.Эйнштейн и Ш.Бозе). В соответствии с квантовой теорией, у любой частицы есть квантовая длина волны. Чем энергичнее частица, тем меньше эта длина. Гипотезу о существовании длины волны у элементарных частиц впервые высказал в 1924 году французский физик Луи де Бройль. В своей диссертации он предложил столь знаменитую теперь формулу, где написал, что длина волны любой частицы обратно пропорциональна ее импульсу: $\lambda = h/(mv)$, где h — постоянная Планка. Позднее его идея была многократно подтверждена различными экспериментами.

Экспериментальная установка, на которой были получены атомные пучки

Физики из группы Кеттерле захватывали атомы натрия в специальную магнитную ловушку (у каждого атома есть магнитный момент, поэтому на него можно воздействовать магнитным полем) и начинали их охлаждать. Температура газа атомов пропорциональна средней кинетической энергии поступательного движения каждого атома: $mv^2/2 = 3kT/2$. Чем меньше температура, тем меньше и скорость каждого атома. А из формулы де Бройля следует, что с уменьшением скорости частицы растет ее длина волны. Когда температура понижается до нескольких миллионых долей градуса выше абсолютного нуля, квантово-механические волны атомов становятся столь большими, что они перекрываются, и вся группа атомов начинает существовать как единое целое. Впервые подобный конденсат был получен в 1995 году в Институте стандартов и технологии университета Колорадо. Группа Кеттерле получила его летом 1996 года, но в гораздо большем количестве — в ловушке существовало более миллиона атомов. Однако тогда не было доказано, что атомы конденсата образовывали одну когерентную волну.

Конденсат — рабочая среда для атомного лазера. Следующим шагом было извлечение атомов из ловушки. По словам Кеттерле, это было делом довольно несложным, гораздо сложнее оказалось доказать, что создан аналог лазера — когерентный пучок атомов. Для этого пришлось осуществить интерференцию атомных пучков.

Интерференция — это физическое явление, при котором в результате сложения двух (или нескольких) когерентных волн возникает череда максимумов и минимумов интенсивности. Пусть разность хода этих волн до некоторой точки есть $\delta = r_1 - r_2$, где r_1 и r_2 — расстояния, которые проходят волны до встречи. Если эта разность хода равна целому числу длин волн: $\delta = k\lambda$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, то мы получаем максимум — волны складываются и усиливают друг друга. Если же разность хода равна нечетному числу полуволн: $\delta = (2k+1)\lambda/2$, то мы получаем минимум — волны ослабляют друг друга.

При помощи лазерного луча атомы в ловушке были разделены на две порции. Потом магнитное поле ловушки отключили, и атомы стали падать вниз под действием собственной тяжести. При падении оба пучка атомов расширялись и в конце концов стали перекрываться. Направив на область перекрытия свет, исследователи увидели классическую картину интерференции — чередование светлых и темных полос, демонстрирующее, насколько далеки законы квантовой физики от привычных нам обыденных примеров и восприятий («атом плюс атом равняется ничто»). Длина волны атомов конденсата оказалось равной тридцати микронам, что в миллионы раз больше, чем

Так выглядят порции атомов, вылетающие из лазера имеют атомы при комнатной температуре.

Доказав, что атомные волны действительно когерентны и могут складываться как обычные волны света, экспериментаторы стали выпускать их из ловушки порциями. Пока у них получается восемь порций атомов, после чего лазер приходится перезаряжать. Чтобы сделать его непрерывно работающим и мощным, надо еще работать и работать. Первое, что собираются предпринять экспериментаторы, — при помощи специальных «атомных отражателей» посылать пучки атомов не только вниз (под действием силы тяжести), но и в других направлениях. Второе — побороть расплывание пучков. И третье — сделать пучок атомов непрерывным.

Заметим, что есть принципиальное различие между световым и атомным лазерами. Фотоны можно воссоздать в процессе работы лазера, а атомы нет, поэтому количество атомов в лазере не увеличивается. Если вы выпускаете пучок атомов, то необходимо возобновлять их запасы. Кроме того, атомы взаимодействуют друг с другом, и пучок их будет расширяться от этого взаимодействия. И наконец, на атомы действует притяжение Земли, и если пустить пучок горизонтально, то он будет попросту отклоняться вниз.

Пока рано говорить о возможных применениях атомного лазера. А помечтать хочется. Уже сейчас ясно, что наличие когерентного пучка атомов поможет физикам измерять физические константы с большой точностью, повысит точность атомных часов. Станет возможным пристальное исследование самих атомов и их свойств, а кроме того — вращения Земли и наиболее фундаментальных положений теории гравитации и общей теории относительности. Атомный лазер открывает большие возможности для нанотехнологии (под нанотехнологией обычно понимают процессы, идущие на масштабах в несколько атомов, потому что размеры самого атома примерно десятая часть нанометра). Так вот, при помощи атомного лазера можно будет сажать атомы на поверхность вещества с невиданной точностью, создавая сложные структуры. Это, конечно, фантазии, пока лазер работает медленно, но в принципе можно думать и о фабричном производстве при помощи атомного лазера. Тут, правда, есть еще одна сложность: атомный лазер, в отличие от светового, может работать лишь в абсолютном вакууме.

Но все равно, никакие «но» не могут снизить восторгов по поводу открытия нового физического явления.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Принцип суперпозиции и напряженности электрического поля

Д.АЛЕКСАНДРОВ

НАПРЯЖЕННОСТЬ поля, создаваемого неподвижным точечным зарядом, можно найти из закона Кулона. Получается

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\,,\ E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Для неточечного заряженного тела задача нахождения напряженности поля сложнее. Один из методов ее решения состоит в разбиении на точечные заряды и применении принципа суперпозиции, согласно которому поле нескольких зарядов равно векторной сумме полей каждого их них. В принципе, этот метод универсален. Он позволяет найти поле в любой ситуации, если известно расположение создающих его зарядов. Единственная проблема — вычислить получающуюся сумму. Разберем несколько практически важных примеров, когда это удается сделать сравнительно просто.

Начнем с совсем простого примера — найдем поле равномерно заряженного кольца на его оси (рис.1).

Разобьем кольцо на маленькие кусочки и найдем поля i-го кусочка в интересующей нас точке:

$$E_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 l^2}.$$

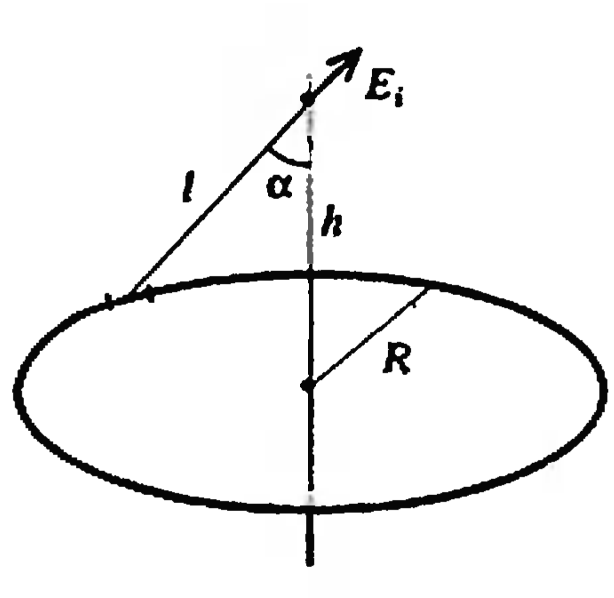


Рис. 1

Поле всего кольца равно

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i.$$

Модуль вектора $\vec{E}$, конечно, не равен сумме модулей отдельных слагаемых, поэтому сначала учтем симметрию задачи и избавимся от векторности суммы. Понятно, что перпендикулярные оси составляющие поля при суммировании сократятся, а параллельные просто сложатся и для модуля результирующего поля можно записать

$$E = \sum E_{i\parallel} = \sum \frac{q_i \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 l^2}.$$

В любой сумме одинаковые для всех слагаемых множители можно выносить за скобки. В нашем случае l и α одинаковы для всех кусочков. Заряды q_i зависят от того, как мы разрезали кольцо, и в принципе могут быть произвольными (но достаточно малыми). Индекс «i», таким образом, не только нумерует кусочки, но и подсказывает нам, что эту величину нельзя вынести за знак суммы. В результате суммирования получим

$$E = \frac{\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\sum q_i = \frac{Q\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0\left(h^2+R^2\right)^{3/2}}.$$

где Q — полный заряд кольца. В центре кольца поле равно нулю, а при $h \gg R$ переходит, как и следовало ожидать, в поле точечного заряда.

Как видно, в данном случае сумма выродилась в тривиальное сложение зарядов отдельных кусочков. Если, однако, зарядить кольцо неравномерно или сдвинуть в сторону точку наблюдения, задача станет несравненно сложнее.

Теперь перейдем к полю бесконечной равномерно заряженной нити (рис.2).

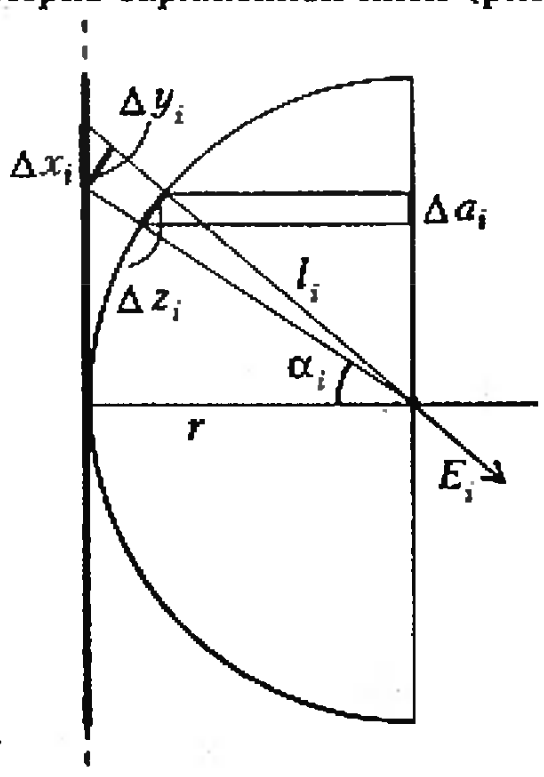


Рис. 2

Обозначим линейную плотность заряда нити через λ, а расстояние от точки наблюдения до нити — через r. Разобьем нить на маленькие кусочки и запишем принцип суперпозиции:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i,$$

где

$$E_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 l_i^2}, \; q_i = \lambda\Delta x_i, \; l_i^2 = r^2 + x_i^2.$$

В этом случае при суммировании сократятся параллельные нити составляющие поля, и для модуля результирующего поля получим

$$E = \sum E_{i\perp} = \sum E_i \cos\alpha_i = \sum \frac{\lambda\Delta x_i}{4\pi\varepsilon_0 l_i^2}\cos\alpha_i.$$

Такая сумма пугает обилием индексов «i», и за знак суммы можно вынести только λ. Однако расчет можно упростить, придав геометрический смысл оставшемуся выражению. Для этого проведем касающуюся нити окружность с центром в точке наблюдения. Тогда $\Delta y_i = \Delta x_i \cos\alpha_i$ (обозначения ясны из рисунка 2), $\Delta z_i = \Delta y_i r/l_i$, $r/l_i = \cos\alpha_i$ и

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum \frac{r\Delta y_i}{l_i}\frac{r}{l_i} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum \Delta z_i \cos\alpha_i = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum \Delta a_i = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2}2r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

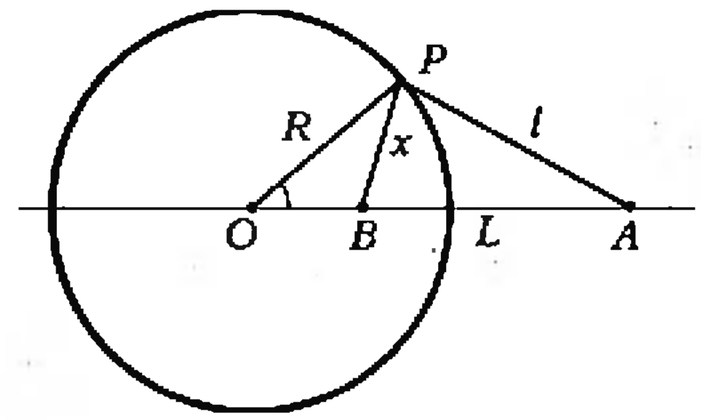


Рис. 3

Аналогично можно справиться с суммой, возникающей при вычислении поля равномерно заряженной плоскости.

Разрежем плоскость на тонкие параллельные полоски. Поле такой полоски мы только что вычислили. Если поверхностная плотность заряда на плоскости σ, а ширина полоски Δx, то заряд единицы длины полоски равен $\lambda = \sigma\Delta x$ и поле, создаваемое i-й полоской в точке наблюдения, равно

$$E_i = \frac{\sigma\Delta x_i}{2\pi\varepsilon_0 l_i}.$$

Согласно принципу суперпозиции (обозначения см. на рисунке 2),

$$E = \sum E_i \cos\alpha_i = \sum \frac{\sigma\Delta x_i \cos\alpha_i}{2\pi\varepsilon_0 l_i}.$$

Поскольку (аналогично предыдущему) $\Delta y_i = \Delta x_i \cos\alpha_i$ и $\Delta z_i = \Delta y_i r/l_i$, получаем

$$E = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\sum \frac{\Delta x_i \cos\alpha_i}{l_i} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\sum \frac{\Delta y_i}{l_i} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}\sum \frac{\Delta y_i r}{l_i} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}\sum \Delta z = \frac{\sigma\pi r}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Упражнения

1. Найдите поле плоскости, разбивая ее не на полоски, а на кольца и используя результат задачи о поле кольца.

2. Найдите поле плоскости, разбивая ее на точечные заряды (вместо полуокружности придется взять полусферу).

Чтобы справится с задачей нахождения поля заряженной сферы, понадобится немного геометрии.

Рассмотрим окружность с центром O и радиусом R и какую-нибудь точку A вне ее (рис.3). Точку B на луче OA, для которой $OA \cdot OB = R^2$, назовем сопряжённой с точкой A. Она обладает многими замечательными свойствами. Для нас важно следующее: $OB/OP = OP/OA$. Треугольники POB и POA, кроме пропорциональных сторон, имеют еще общий угол, поэтому они подобны. Обозначив $OA = L$, $BP = x$, $PA = l$ и $OP = R$, имеем $R/L = x/l$. Из подобия

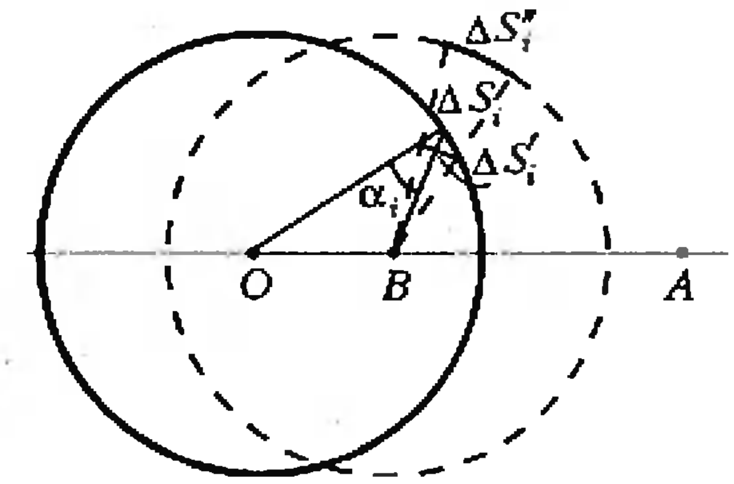


Рис. 4

также следует, что

$$\angle OPB = \angle PAO.$$

Теперь займемся собственно полем сферы. Если A — точка наблюдения, а σ — плотность заряда на сфере, то в обозначениях на рисунках 3 и 4 имеем

$$E = \sum \frac{\sigma\Delta S_i}{4\pi\varepsilon_0 l_i^2}\cos\alpha_i.$$

Построим сферу того же радиуса с центром в точке B, сопряженной с A, и найдем площадь $\Delta S_i''$, которую закрывает на ней площадка ΔS_i, если смотреть из точки B:

$$\Delta S_i'' = \left(\frac{R}{x}\right)^2 \Delta S_i' = \frac{R^2 \Delta S_i \cos\alpha_i}{x^2}.$$

Вспомнив, что $x/R = l/L$, получим

$$\Delta S_i'' = \frac{\Delta S_i \cos\alpha_i}{l_i^2} L^2$$

и найдем нужную нам сумму:

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{\Delta S_i \cos\alpha_i}{l_i^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\sum \Delta S_i'' = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}.$$

Упражнение 3. Покажите, что внутри сферы поля нет.

Задачи с параметром

В. ВАВИЛОВ

ЗАДАЧИ с параметром весьма разнообразны как по содержанию и формулировкам, так и по методам их решения.

Наиболее существенной частью решения задачи с параметром часто является переход к более простой равносильной ей (т.е. имеющей то же множество решений) задаче.

В этой статье мы разберем несколько примеров таких задач.

Помогает область определения

Каждое уравнение, неравенство, система и т.д. имеют свою область определения, а анализ условий, ее определяющих, как правило, является необходимой (а часто и значительно упрощающей) частью решения задачи.

Пример 1. *При каждом значении a решите уравнение*

$$\sqrt{xa-2}+\sqrt{2-ax}=x^2-5x+6.$$

Решение. Условия, определяющие возможные значения x и a, можно записать в виде системы

$$\begin{cases} xa-2\ge 0, \\ 2-ax\ge 0; \end{cases}$$

поэтому $ax = 2$. Таким образом, исходное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2-5x+6=0, \\ ax=2 \end{cases}$$

Отсюда:

если $a = 2/3$, то $x = 3$;

если $a = 1$, то $x = 2$;

если $a \ne 0$ и $a \ne 2/3$, то решений нет.

Пример 2. *При каждом значении a решите неравенство*

$$\log_{a-x}(x-a-1)\ge -1.$$

Решение. Область определения данного неравенства задается условиями $x - a - 1 > 0$, $a - x > 0$, $a - x \ne 1$. Однако неравенства $x - a - -1 > 0$ и $a - x > 0$ не имеют общих решений. Значит, область определения неравенства не содержит никаких пар чисел x и a, а поэтому неравенство не имеет решений.

Пример 3. *При каждом значении a решите систему неравенств*

$$\begin{cases} \log_{2-x}(2-a)>0, \\ \log_{4-a}(2x-2)>0. \end{cases}$$

Решение. Область определения данной системы задается следующими условиями: $2 - x > 0$, $2x - 2 > 0$, $2 - x \ne 1$, $4 - a > 0$, $2 - a > 0$, $4 - a = 1$.

Отсюда находим, что

$$1 < x < 2 \text{ и } a < 2.$$

При таких ограничениях на значения x и a для оснований логарифмов исходной системы имеем

$$0 < 2 - x < 1 \text{ и } 4 - a > 2.$$

Таким образом, данная система равносильна системе

$$\begin{cases} 1<x<2, \\ a<2, \\ 0<2-a<1, \\ 2x-2>1, \end{cases}$$

которая легко решается и дает следующий ответ:

если $1 < a < 2$, то $3/2 < x < 2$;

при других значениях a решений нет.

В задачах с неизвестным x и параметром a под областью определения понимается множество всех упорядоченных пар чисел $(x; a)$, каждая из которых такова, что после подстановки соответствующих значений x и a во все входящие в задачу соотношения они будут определены. Поэтому область определения задачи с одним параметром – это некоторое множество на координатной плоскости Oxa; на рисунке 1, *а*, *б* показаны области, отвечающие соответственно областям определения, полученным в примерах 1 и 3. Возможности, связанные с такой интерпретацией, позволяют использовать графические соображения при решении задач с параметром.

Анализ условий, задающих область определения, является, как правило, обязательным при решении задачи. Однако при этом совершенно не обязательно точное ее нахождение (трудности поиска области определения, и даже описания условий, ее задающих, иногда не проще решения задачи).

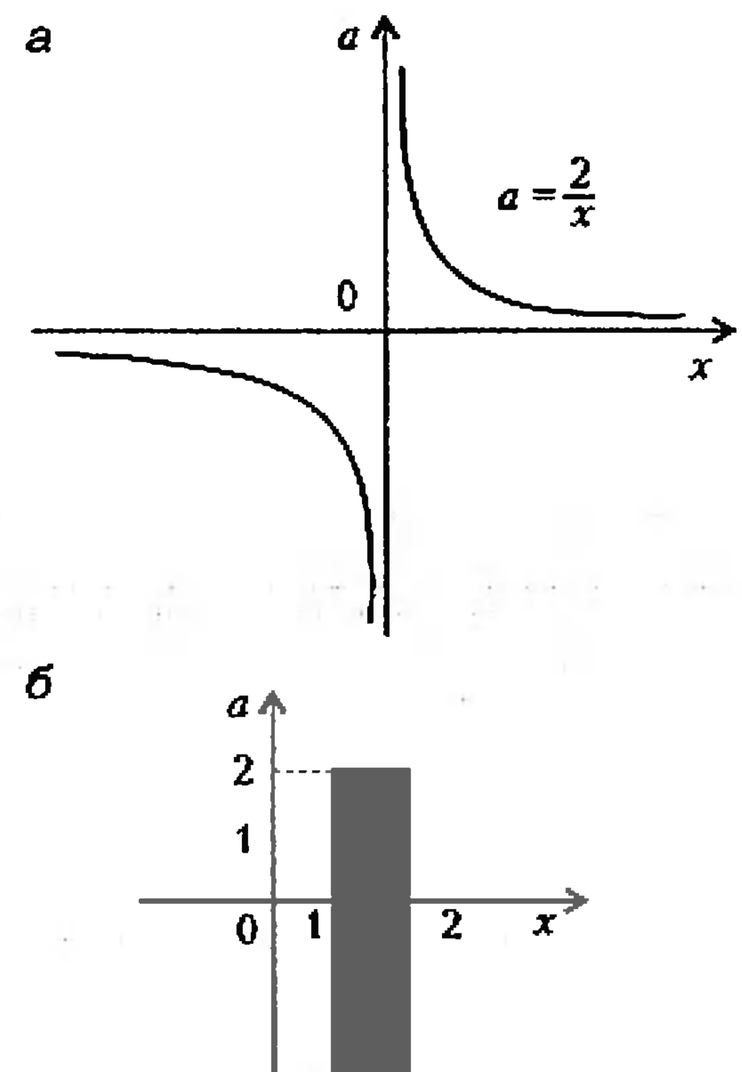


Рис. 1

Пример 4. *Найдите все такие значения a, b и c, при которых уравнение*

$$\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}+\sqrt{x}=c$$

имеет бесконечно много решений.

Решение. Предварительный поиск области определения привел бы к довольно сложному исследованию относительно двух параметров. Поэтому мы поступим по-другому. Перенесем $\sqrt{x}$ в правую часть и возведем обе части полученного уравнения в квадрат. После приведения подобных членов получим уравнение

$$(a+2c)\sqrt{x}=c^2-b,$$

являющееся следствием данного уравнения. Это уравнение имеет больше одного решения только при $a + 2c = 0$ и $c^2 - b = 0$. Но тогда исходное уравнение принимает вид

$$\left|\sqrt{x}-c\right|=c-\sqrt{x}.$$

При $c < 0$ это уравнение решений не имеет, при $c = 0$ оно имеет единственное решение $x = 0$, а при $c > 0$ получим $0 \le x \le c^2$.

Итак, данное уравнение имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $a = -2c$, $b = c^2$, $c > 0$, и ему удовлетворяют все $x \in \left[0;\ c^2\right]$.

Замена переменных

Естественно, при решении задач с параметрами используются все известные методы решения алгебраических задач: замена переменной, сведение задачи к решению систем уравнений и неравенств и другие.

Пример 5. *Решите уравнение*

$$(x-a-1)(x-a-2)\times$$
$$\times(x-a-4)(x-a-5)=-2.$$

Решение. Используем так называемый метод симметризации, в основе которого (в данной задаче) лежит тот факт, что на оси абсцисс множество из четырех точек $a+1$, $a+2$, $a+4$, $a+5$ симметрично относительно точки $a+3$. Выполним замену переменных

$$y=\frac{1}{4}(x-a-1+x-a-2+x-$$
$$-a-4+x-a-5)=x-a-3,$$

в результате чего приходим к уравнению

$$(y+2)(y+1)(y-1)(y-2)=-2,$$

или

$$y^4-5y^2+6=0.$$

Поэтому данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$(x-a-3)^2=2,\ (x-a-3)^2=3,$$

из которых находим четыре корня:

$$a+3+\sqrt{2},\ a+3-\sqrt{2},\ a+3+\sqrt{3},\ a+3-\sqrt{3}.$$

Пример 6. *При каждом значении a решите неравенство*

$$x^3+\sqrt{a}x^2\le 2a\sqrt{a}.$$

Решение. Область определения задается неравенством $a\ge 0$.

При $a=0$, очевидно, имеем $x\le 0$. Чтобы решить это неравенство при $a>0$, заметим, что, разделив обе части ($a>0$) неравенства на $a\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^3$ и положив $y=x/\sqrt{a}$, получим неравенство

$$y^3+y^2-2\le 0.$$

Так как

$$y^3+y^2-2=(y-1)\left(y^2+2y+2\right)$$

и

$$y^2+2y+2=(y+1)^2+1>0,$$

находим, что $y\le 1$.

Итак, решений нет при $a<0$,

$$x\le\sqrt{a}\ \text{при}\ a\ge 0.$$

Пример 7. *Решите уравнение*

$$\sqrt[3]{8a+x}+\sqrt[3]{8a-x}=\sqrt[3]{a}.$$

Решение. Область определеня уравнения состоит из всех действительных чисел как для x, так и для a.

Если $a=0$, то уравнению удовлетворяет любое $x\in\boldsymbol{R}$.

При $a\ne 0$, разделив обе части уравнения на $\sqrt[3]{a}$ и положив $u=\sqrt[3]{8+(x/a)}$, $v=\sqrt[3]{8-(x/a)}$, получим, что $u+v=1$. Кроме того, $u^3+v^3=16$, так что для нахождения u и v имеем систему уравнений

$$\begin{cases}u+v=1,\\ u^3+v^3=16,\end{cases}$$

решая которую (например, методом подстановки) получим для u два возможных значения:

$$u_1=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{21}\right),\ u_2=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{21}\right).$$

Таким образом, при $a\ne 0$ данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sqrt[3]{8+(x/a)}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{21}\right),$$

$$\sqrt[3]{8+(x/a)}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{21}\right),$$

откуда $x=\pm 3a\sqrt{21}$.

Ответ:

если $a=0$, то $x=t$, где $t\in\boldsymbol{R}$;

если $a\ne 0$, то $x_1=3a\sqrt{21}$, $x_2=-3a\sqrt{21}$.

Равносильность

При решении неравенств с параметрами необходимо особенно тщательно следить, чтобы в ходе этих преобразований не терялись решения и не появлялись посторонние решения.

Пример 8. *Для каждого значения a решите неравенство*

$$a+\frac{4a^2}{|x-2a|}\ge 0.$$

Решение. Область определения неравенства задается соотношением $x\ne 2a$. При $a\ge 0$, очевидно, решением неравенства является любое действительное число $x\ne 2a$.

Если $a<0$, то данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}a<0,\\ 1+\dfrac{4a}{|x-2a|}\le 0,\\ x\ne 2a,\end{cases}$$

которая, так как $|x-2a|>0$ при $x\ne 2a$, в свою очередь, равносильна системе

$$\begin{cases}a<0,\\ x\ne 2a,\\ |x-2a|<-4a.\end{cases}$$

Из неравенства $|x-2a|<-4a$ находим, что $6a<x<-2a$. Таким образом,

если $a\ge 0$, то $x=t$, где t любое число и $t\ne 2a$;

если $a<0$, то $3a<x<-a$.

При решении этого неравенства, конечно, было бы очень грубой и непростительной ошибкой бездумно сократить на a без учета знака переменой a.

Следующий пример на первый взгляд не представляет ничего особенного, но при его решении надо быть предельно внимательным и осторожным.

Пример 9. *Для каждого значения a решите неравенство*

$$\frac{a-x}{a+x}\ge a. \qquad (1)$$

Решение. Приводя к общему знаменателю, получим неравенство

$$\frac{(a+1)x+a(a-1)}{a+x}\le 0,$$

которое равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}(a+1)x+a(a-1)\ge 0,\\ a+x<0,\end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases}(a+1)x+a(a-1)\le 0,\\ a+x>0.\end{cases} \qquad (3)$$

Приведем подробное решение только системы (2); она, в свою очередь, равносильна совокупности, состоящей из трех систем:

$$\begin{cases}a+1=0,\\ a(a-1)\ge 0,\\ a+x<0,\end{cases} \qquad (2а)$$

$$\begin{cases}a+1>0,\\ x\ge -a\dfrac{a-1}{a+1},\\ x<-a,\end{cases} \qquad (2б)$$

$$\begin{cases}a+1<0,\\ x\le -a\dfrac{a-1}{a+1},\\ x<-a.\end{cases} \qquad (2в)$$

Из (2а) находим, что если $a=-1$, то система (2) имеет решение: $x<1$. Кроме того,

$$(2б)\Leftrightarrow\begin{cases}a+1>0,\\ -a>-a\dfrac{a-1}{a+1},\\ -a\dfrac{a-1}{a+1}\le x<-a.\end{cases}$$

Так как

$$-a > -a\frac{a-1}{a+1} \Leftrightarrow \frac{a}{a+1} < 0,$$

то

$$(2б) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 0, \\ -a\dfrac{a-1}{a+1} \le x < -a \end{cases}$$

и, следовательно, для системы (2б) получаем:

если $-1 < a < 0$, то $-a\dfrac{a-1}{a+1} \le x < -a$;

если $a \ge 0$, то решений нет.

Для решения системы (2в) отметим, что при $a + 1 < 0$ выполняется неравенство $-a < -a\dfrac{a-1}{a+1}$ (см. выше). Поэтому

$$(2в) \Leftrightarrow \begin{cases} a+1 < 0, \\ x < -a \end{cases}$$

и, тем самым, для системы (2в) имеем следующий ответ:

если $a < -1$, то $x < -a$.

Объединяя полученные результаты вместе, для системы (2) получим такой ответ:

если $a \le -1$, то $x < -a$;

если $-1 < a < 0$, то $-a\dfrac{a-1}{a+1} \le x < -a$;

если $a \ge 0$, то решений нет.

Аналогично решается система (3); читателю предлагается провести необходимые рассуждения самостоятельно, рассмотрев соответствующие ей системы (3а), (3б), (3в). Приведем здесь полный ответ к неравенству (1):

если $a < -1$, то $x < -a$ или $x \ge -a\dfrac{a-1}{a+1}$;

если $a = -1$, то $x < 1$;

если $-1 < a < 0$, то $-a\dfrac{a-1}{a+1} \le x < a$;

если $a = 0$, то решений нет;

если $a > 0$, то $-a < x \le -a\dfrac{a-1}{a+1}$.

Приведенное решение основано на довольно разветвленной (хотя и простой) логической схеме, которая условно показана на рисунке 2; в ней знак $\leftrightarrow$ означает, что решение равносильно разбору двух (аналогично, трех, четырех, ...) случаев, в логическом отношении связанных между собой союзом «или». Кроме того, отметим, что при решении задачи, по существу, был использован метод интервалов (для переменных x и a), являющийся удобным способом решения разнообразных задач.

В основе другого решения могут быть использованы графические представления (см. рис.3, на котором отмечены все области, координаты точек $(x;a)$ которых удовлетворяют неравенству (1)). Подчеркнем, однако, что обоснование этого рисунка потребует практически столько же аналитической работы, как и в приведенном решении. Отметим также, что рисунок 3, сделанный эскизно правильно и даже без

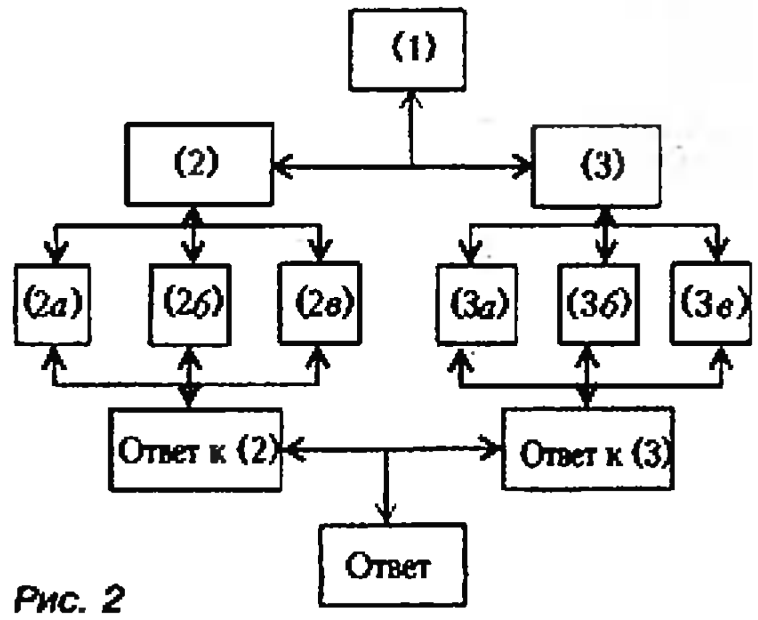


Рис. 2

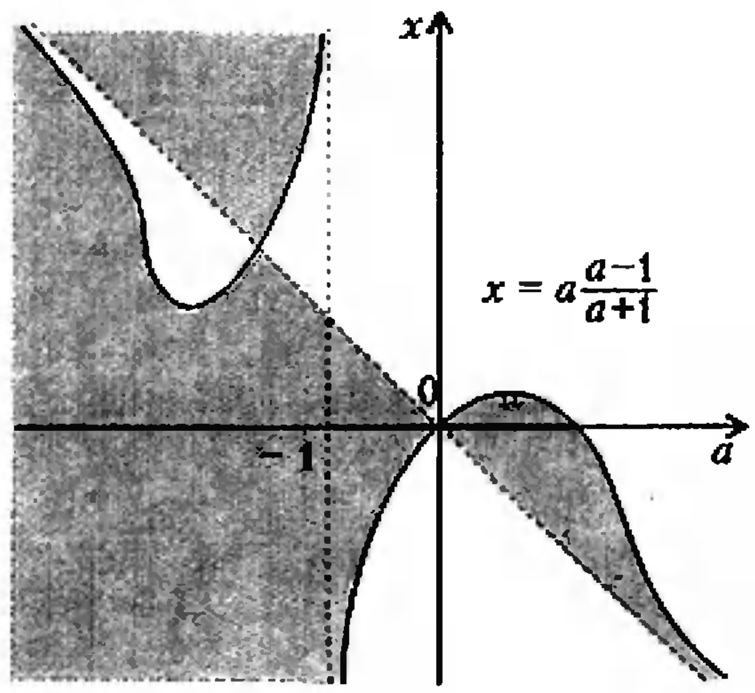


Рис. 3

необходимых обоснований, служит прекрасным инструментом (не только в этой задаче) для качественной проверки структуры полученного ответа и в поиске наиболее простой логической схемы аналитического решения.

Расположение корней квадратного трехчлена

Многие задачи с параметрами сводятся к исследованию квадратичной функции и изучению расположения корней квадратного трехчлена в зависимости от его коэффициентов. Эта тема представляет и самостоятельный интерес; мы ограничимся здесь только двумя примерами.

Пример 10. *Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение*

$$(3a+2)x^2 + (a-1)x + 4a + 3 = 0$$

имеет корни. Исследуйте расположение этих корней на оси абсцисс по отношению к точкам −1 и +1.

Решение. Если $3a + 2 = 0$, то уравнение принимает вид $\left(-\dfrac{2}{3} - 1\right)x - \dfrac{8}{3} + 3 = 0$ и, тем самым, имеет единственный корень $x = 1/5$.

Пусть $a \ne -\dfrac{2}{3}$. Тогда квадратный трехчлен $p(x) = (3a+2)x^2 + (a-1)x + 4a + 3$ имеет корни x_1 и x_2, $x_1 \le x_2$, только в том случае, когда

$$(a-1)^2 - 4(3a+2)(4a+3) \ge 0;$$

отсюда находим, что $-1 \le a < -\dfrac{2}{3}$ или $-\dfrac{2}{3} < a \le -\dfrac{23}{47}$.

При $a = -1$ получаем $x_1 = x_2 = -1$, а при $a = -\dfrac{23}{47}$ имеем $x_1 = x_2 = 7/5$.

Теперь рассмотрим отдельно два случая.

1) Пусть $-1 < a < -2/3$. Так как

$$p(1) = 3a + 2 + a - 1 + 4a + 3 = 4(2a+1)$$

и

$$p(-1) = 3a + 2 - a + 1 + 4a + 3 = 6(a+1),$$

то в рассматриваемом случае, очевидно, имеем

$$p(-1) > 0,\ p(+1) < 0.$$

Ветви параболы $y = p(x)$ направлены вниз $(2a + 3 < 0)$, значение $p(-1)$ положительно, а значение $p(+1)$ отрицательно; поэтому (рис.4) при $-1 < a < -\dfrac{2}{3}$ имеем $x_1 < -1 < x_2 < +1$.

2) Пусть $-\dfrac{2}{3} < a < -\dfrac{23}{47}$. При таких значениях a имеем

$$p(-1) = 6(a+1) > 6\left(-\frac{2}{3}+1\right) = 2 > 0.$$

Выясним теперь, какой знак имеет значение $p(1) = 4(2a+1)$ в рассматриваемом промежутке изменения a. Так как

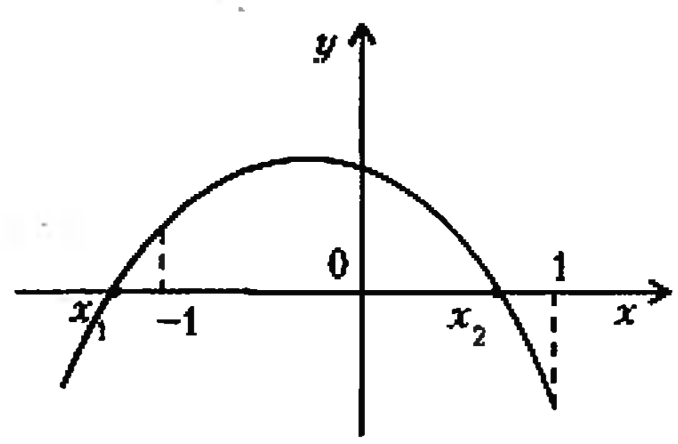


Рис. 4

$2a + 1 \ge 0$ при $a \ge -\dfrac{1}{2}$ и $-\dfrac{2}{3} < -\dfrac{1}{2} < -\dfrac{23}{47}$, то

$$p(1) < 0 \text{ при } -\frac{2}{3} < a < -\frac{1}{2}$$

и

$$p(1) > 0 \text{ при } -\frac{1}{2} < a < -\frac{23}{47}.$$

Кроме того, $p(1) = 0$ при $a = -\dfrac{1}{2}$; в этом случае, как легко убедиться, $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Таким образом (рис.5,а,б), если $-\dfrac{2}{3} < a < -\dfrac{1}{2}$, то $-1 < x_1 < 1 < x_2$; если

$-\frac{1}{2} < a < -\frac{23}{47}$, то $1 < x_1 < x_2$.

Итак, исследованы все возможные значения a, когда данное уравнение имеет корни, и в зависимости от этих значений изучено расположение этих корней на оси абсцисс. Из экономии места мы не будем здесь сводить полученные результаты в итоговый ответ.

Сделаем одно замечание. У читателя вполне могло сложиться впечатление, что в некоторых моментах обоснования решения задачи использовались графические соображения. А на вступительных экзаменах такие аргументы не всегда считаются безупречными. Подчеркнем поэтому, что используемые нами графики носят чисто иллюстративный характер; в действительности же в решении использовалось такое утверждение: *квадратный трехчлен* $p(x) = x^2 + px + q$ *имеет ровно один корень в интервале* $c < x < d$, *а другой вне отрезка* $[c;\ d]$ *тогда и только тогда, когда* $p(c)p(d) < 0$.

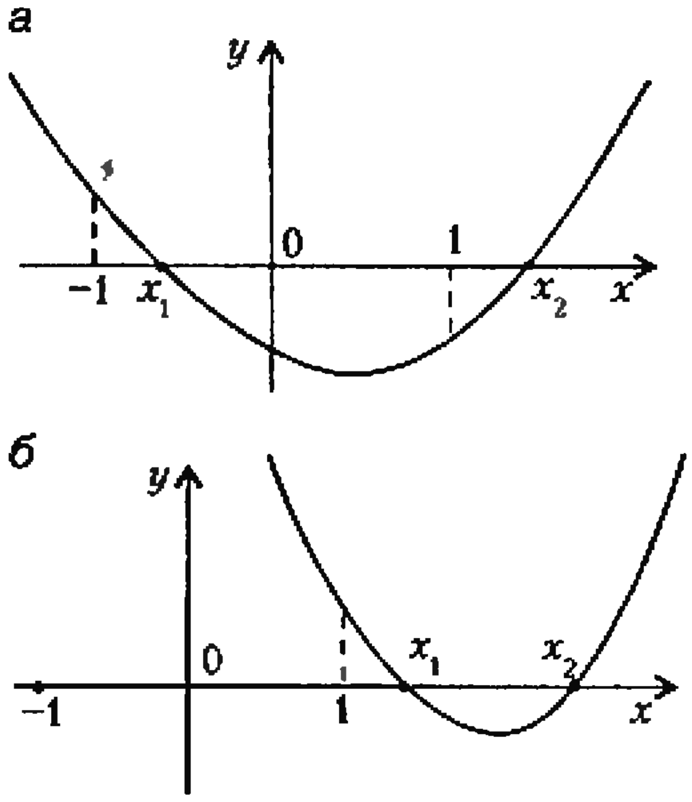


Рис. 5

Отметим также, что при решении этой задачи можно использовать так называемый метод сечений. Для этого заметим, что данное уравнение равносильно уравнению

$$a = f(x),\text{ где } f(x) = -\frac{2x^2 - x + 3}{3x^2 + x + 4}.$$

Проведя с необходимыми обоснованиями полное исследование (например, при помощи производной) свойств графика функции $f(x)$ и используя ее непрерывность при любом значении x, можно довести такой метод решения до конца (эскиз графика $a = f(x)$ показан на рисунке 6).

Пример 11. *Решите уравнение*

$$\sqrt{1-x^2} = \left(a - \sqrt{x}\right)^2. \qquad (1)$$

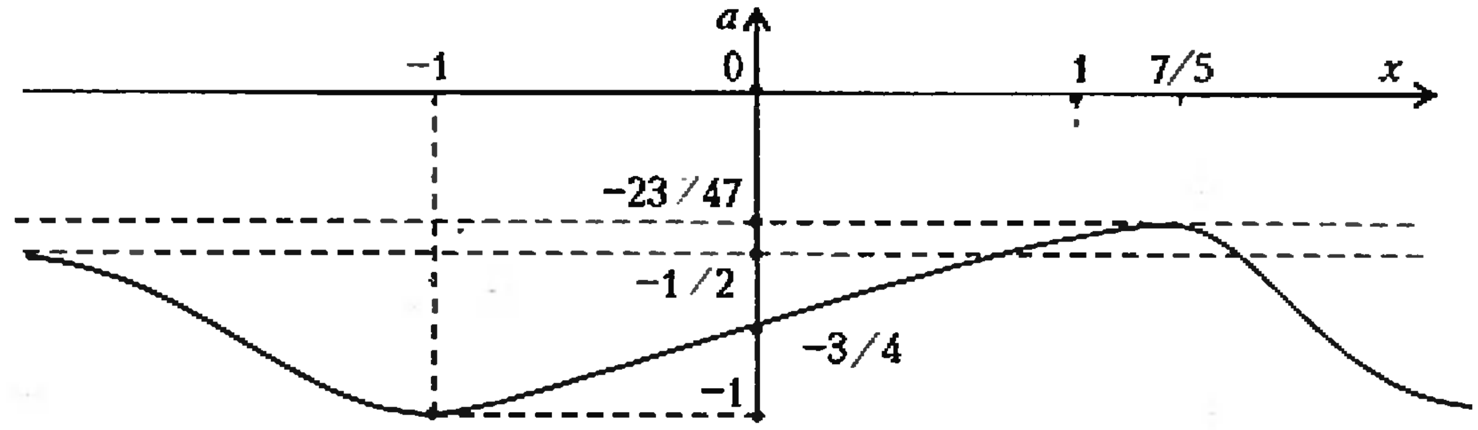


Рис. 6

Решение. Область опеделения уравнения задается двойным неравенством $0 \le x \le 1$. Сведем решение уравнения к решению системы уравнений. Для этого положим $u = \sqrt{x}$, $v = a - \sqrt{x}$; тогда $1 - x^2 = 1 - u^4$, $\left(a - \sqrt{x}\right)^2 = v^2$ и, кроме того, $0 \le u \le 1$. Для нахождения u и v, таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} u + v = a, \\ u^4 + v^4 = 1, \\ 0 \le u \le 1. \end{cases}$$

Так как

$$u^4 + v^4 = \left(u^2 + v^2\right)^2 - 2u^2v^2 =$$

$$= \left((u+v)^2 - 2uv\right)^2 - 2(uv)^2,$$

то эта система равносильна следующей:

$$\begin{cases} u + v = a, \\ 2(uv)^2 - 4a^2(uv) + a^4 - 1 = 0, \\ 0 \le u \le 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Квадратное уравнение $2t^2 - 4a^2t + a^4 - 1 = 0$ при любом значении a имеет два корня (возможно совпадающих):

$$t_1 = a^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2a^4 + 2},\ t_2 = a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2a^4 + 2}.$$

Поэтому система (2) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} u + v = a, \\ uv = t_1, \\ 0 \le u \le 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} u + v = a, \\ uv = t_2, \\ 0 \le u \le 1. \end{cases} \qquad (3)$$

Первая система этой совокупности решений не имеет, так как дискриминант квадратного трехчлена $z^2 - az + t_1$, корнями которого должны быть u и v, равен $a^2 - 4t_1 = -3a^2 - 2\sqrt{2a^4 + 2}$ и при любом значении a является отрицательным числом.

Переходя теперь ко второй системе совокупности (3), рассмотрим квадратный трехчлен $p(z) = z^2 - az + t_2$. Система имеет решения тогда и только тогда, когда квадратный трехчлен $p(z)$ имеет по крайней мере один корень на промежутке $0 \le z \le 1$. Уравнение имеет корни только в том случае, если

$$a^2 - 4t_2 = -3a^2 + 2\sqrt{2a^4 + 2} \ge 0.$$

Решая это неравенство, найдем, что $a^2 \le 8$, т.е. $|a| \le 2\sqrt{2}$.

Отсюда уже можно сделать вывод, что если $|a| > 2\sqrt{2}$, то уравнение (1) решений не имеет.

Уравнение

$$p(z) = z^2 - az + t_2 = 0$$

имеет по крайней мере один корень, который принадлежит промежутку $0 \le z \le 1$, только тогда, когда a удовлетворяет совокупности, состоящей из двух систем (рис.7,*а*,*б*)

$$\begin{cases} |a| \le 2\sqrt{2}, \\ p(0) \ge 0, \\ p(1) \ge 0, \\ 0 \le a/2 \le 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} |a| \le 2\sqrt{2}, \\ p(0)p(1) \le 0, \end{cases}$$

т.е. совокупности

$$\begin{cases} |a| \le 2\sqrt{2}, \\ t_2 \ge 0, \\ 1 - a + t_2 \ge 0, \\ 0 \le a/2 \le 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} |a| \le 2\sqrt{2}, \\ t_2(1 - a + t_2) \le 0. \end{cases} \qquad (4)$$

(Отметим, что условие $0 \le a/2 \le 1$ означает, что абсцисса вершины параболы $p(z)$ принадлежит отрезку $0 \le z \le 1$.) Первая из систем (4) является необходимым и достаточным условием того, что уравнение $p(z) = 0$ имеет два корня и они оба принадлежат промежутку $0 \le z \le 1$, а вторая система — необходимым и достаточным условием того, что уравнение $p(z) = 0$ имеет корни и ровно один из них принадлежит указанному промежутку.

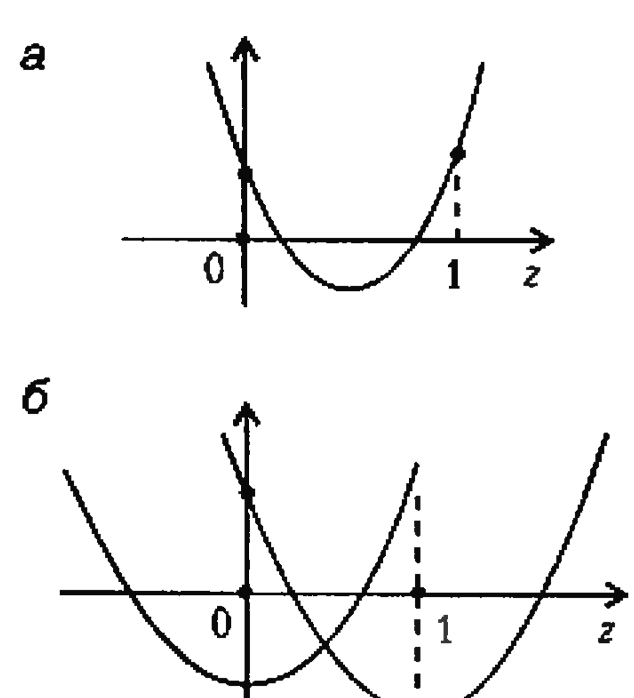


Рис. 7

Неравенство $t_2 \ge 0$, т.е. неравенство $a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2a^4+2} \ge 0$, дает, что $|a| \ge 1$. Тем самым, из первого, второго и четвертого условий первой системы совокупности (4) заключаем, что $1 \le a \le 2$. Покажем, что при таких значениях a выполняется также и неравенство $1 - a + t_2 \ge 0$. Для этого нужно показать, что

$$a^2 - a + 1 \ge \frac{1}{2}\sqrt{2a^4+2} \text{ при } 1 \le a \le 2. \quad (5)$$

Возводя в квадрат неравенство (5), получаем после упрощений эквивалентное неравенство $a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1 \ge 0$, левая часть которого равна $(a-1)^4$. Поскольку $(a-1)^4 \ge 0$ при всех a, неравенство (5) также справедливо при всех a. Отсюда следует, что решениями первой системы совокупности (4) являются все значения a такие, что $1 \le a \le 2$. Итак, если $1 \le a \le 2$, то для u получаем два значения: $u_1 = z_1$, $u_2 = z_2$, где

$$z_1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4t_2},$$

$$z_2 = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4t_2}$$

— корни уравнения $p(z) = 0$.

Рассмотрим вторую систему совокупности (4). Она, в свою очередь, равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} |a| \le 2\sqrt{2}, \\ a - 1 \ge 0, \\ 0 \le t_2 \le a - 1, \end{cases} \quad \begin{cases} |a| \le 2\sqrt{2}, \\ a - 1 \le 0, \\ a - 1 \le t_2 \le 0. \end{cases}$$

Из неравенства (5) следует, что $1 - a + t_2 \ge 0$; поэтому из первой системы этой совокупности находим, что $t_2 = a - 1$ и, тем самым, $a = 1$ и $t_2 = 0$, что не добавляет ничего нового по сравнению с ранее изученным.

Из первых двух неравенств второй системы находим, что $-2\sqrt{2} \le a \le 1$. Кроме того, так как $t_2 \le 0$, то $|a| \le 1$ (см. выше); следовательно, интересующая нас система равносильна следующей:

$$\begin{cases} |a| \le 1, \\ a - 1 \le t_2. \end{cases}$$

При этом неравенство $a - 1 \le t_2$ справедливо. Поэтому из этой системы находим, что $|a| \le 1$. Следовательно, если $|a| \le 1$, то для u имеется только одно значение — неотрицательный корень уравнения $z^2 - az + t_2 = 0$, т.е. $u = z_2$ (напомним, что $t_2 \le 0$; поэтому $z_1 z_2 \le 0$).

Итак, объединяя полученные результаты, имеем:

если $1 < a \le 2$, то $x = z_1^2$, $x = z_2^2$;

если $a = 1$, то $x = 0$;

если $-1 \le a < 1$, то $x = z_2^2$;

при остальных значениях a уравнение (1) корней не имеет.

Как отмечалось выше, разнообразие задач с параметрами очень велико. Их решение требует достаточно высокой аналитической культуры и построения строгой логической конструкции их решения.

В заключение отметим старую истину: для того чтобы научиться решать задачи, нужно... их решать!

ИНФОРМАЦИЯ

VII САХАРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

Научная конференция школьников «VII Сахаровские чтения» проходила 20—23 мая в лицее «Физико-техническая школа» Санкт-Петербурга в шести секциях: физика, математика, биология, история, литературоведение, программирование. После предварительного рецензирования представленных докладов (более 250) в программу конференции вошло около 170 докладов по всем секциям. В конференции приняли участие школьники 8 — 11 классов из России, Украины и США. Открытие и закрытие конференции проходило в конференц-зале старейшего российского Физико-технического института им.А.Ф.Иоффе РАН. Открывали конференцию член-корреспондент РАН Ю.С.Васильев и главный ученый секретарь СПбНЦ РАН профессор Э.А.Тропп, которые рассказали о творческом пути А.Д.Сахарова, о месте науки в жизни общества.

На секции физики было рассмотрено 32 доклада, среди которых 19 было представлено в виде стендовых сообщений.

Все участники, включенные в программу конференции, получили дипломы участников «Сахаровских чтений», а лучшие работы, доложенные на конференции, были отмечены призами. Лучшими были признаны следующие работы:

— *Моисеевой Ирины* (гимназия №1, Самара, 10 кл.) «Голографическая интерферометрия. Анализ вибрирующего тела с использованием голографической интерферометрии»;

— *Ельцова Александра* (лицей ФТШ, Санкт-Петербург, 11 кл.) «Исследование динамики транспортного барьера и особенностей L-H перехода в токомаках»;

— *Альтмана Станислава, Бакулина Евгения и Коковина Станислава* (школа-лицей №18, Калининград, 11 кл.) «Способы получения радужных голограмм, их серийное производство и применение»;

— *Фатова Михаила* (Специализированный учебно-научный центр МГУ, Москва, 11 кл.) «Компьютерное моделирование процесса ионного распыления поверхности с переменной кривизной».

Секция математики конференции выглядела скромнее — в ней приняли участие около 30 школьников. Однако все 12 заслушанных докладов произвели на жюри весьма хорошее впечатление.

Жюри отметило доклады *Анастасии Ставровой* (школа №113, Санкт-Петербург) «Некоторые свойства умножения Дирихле на множестве мультипликативных функций», *Дарьи Панченко* (гимназия №32, Калининград) «Когда сумма нескольких натуральных чисел равна их произведению», *Антона Васильева* (школа-лицей №18, Калининград) «О суммах последовательных квадратов», *Олега Паранонова* (школа №610, Санкт-Петербург) «Бифуркации циклов для отображения $f(x) = \lambda x(1-x)$».

На «Сахаровских чтениях» не принято присуждать докладчикам первых, вторых и т.д. мест. И это разумно. Ведь истинной целью конференции является научное общение юных участников друг с другом и со старшими коллегами. А соревнований — олимпиад и конкурсов — и без того предостаточно.

Участникам конференции была предложена интересная культурная программа, включающая экскурсии по городу и посещение театров. Организаторы конференции, руководители и члены жюри приняли участие в работе круглого стола, на котором обсуждались проблемы научного творчества школьников и формы организации научных конференций.

А.Егоров, В.Лобышев

Корпускулярные свойства света

В. МОЖАЕВ

ЕСЛИ интерференция и дифракция света вполне однозначно подтверждают волновые свойства света, то такие явления, как фотоэлектрический эффект или эффект Комптона (упругое рассеяние фотонов на свободных электронах, которое приводит к увеличению длины волны рассеянного фотона), говорят о наличии у света корпускулярных свойств. Свет обладает двойственностью (дуализмом) свойств.

Согласно Эйнштейну, электромагнитное поле можно рассматривать как совокупность движущихся со скоростью света фотонов — частиц с нулевой массой покоя и энергией

$$E = h\nu,$$

где ν — частота излучения, а $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — универсальная постоянная, получившая название постоянной Планка. Но если фотон обладает энергией, то он должен обладать и импульсом, как этого требует теория относительности. Фотон является типичной ультрарелятивистской частицей, а для таких частиц связь между энергией E и импульсом p имеет простой вид

$$E = pc,$$

где c — скорость света. Поэтому импульс фотона равен

$$p = \frac{h\nu}{c}.$$

Импульс фотона проявляется, например, в давлении света.

Чем больше частота электромагнитного излучения, тем больше энергия и импульс фотона и тем более отчетливо проявляются корпускулярные свойства света. Если энергия и импульс фотонов видимого света крайне малы — для зеленого света, например, $E = 4 \cdot 10^{-19}$ Дж $= 2{,}5$ эВ — и такие фотоны поддерживают жизнь на нашей Земле, то фотоны, начиная с энергии порядка 5 эВ (ультрафиолет) и далее, благодаря своим корпускулярным свойствам, приводят к разрушению всего живого. Но не будем о грустном и перейдем к разбору задач, в которых фигурируют корпускулярные свойства света.

Задача 1. *Пылинка освещается импульсом лазерного света с длиной волны $\lambda = 6{,}3 \cdot 10^{-5}$ см. Определите число поглощенных пылинкой фотонов, если она в результате действия света приобрела скорость $v = 1$ мм/с. Масса пылинки $m = 0{,}1$ мг. Считать, что пылинка поглощает весь падающий на нее свет.*

Обозначим число фотонов, поглощенных пылинкой, через N. До поглощения фотоны обладали суммарным импульсом

$$p = \frac{Nh}{\lambda}.$$

По закону сохранения импульса после поглощения фотонов пылинка приобретает импульс, равный импульсу фотонов:

$$mv = \frac{Nh}{\lambda}.$$

Отсюда получаем

$$N = \frac{mv\lambda}{h} = 9{,}5 \cdot 10^{16}.$$

Рассмотрим энергетический баланс данного процесса. Энергия поглощенных фотонов

$$E = N\frac{hc}{\lambda} = mvc,$$

а кинетическая энергия, которую приобрела пылинка,

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Отношение энергий равно

$$\frac{E_k}{E} = \frac{v}{2c} = 1{,}7 \cdot 10^{-12}.$$

То, что это отношение пропорционально v/c, говорит о том, что мы имеем дело с релятивистским эффектом. Однако коэффициент 1/2 свидетельствует о том, что одна из частиц — а именно пылинка — является нерелятивистской. Чрезвычайно малое значение отношения E_k/E означает, что практически вся энергия фотонов переходит во внутреннюю энергию пылинки.

Задача 2. *Узкий пучок импульсного лазерного излучения с энергией $W = 0{,}4$ Дж и длительностью $\tau = 10^{-9}$ с падает на собирающую линзу параллельно ее главной оптической оси (рис. 1). Расстояние от пучка до главной оптической оси равно фокусному расстоянию линзы. Найдите величину средней силы, действующей на линзу со стороны света, если половина энергии лазерного излучения поглощается в линзе. Отражением от поверхностей линзы пренебречь.*

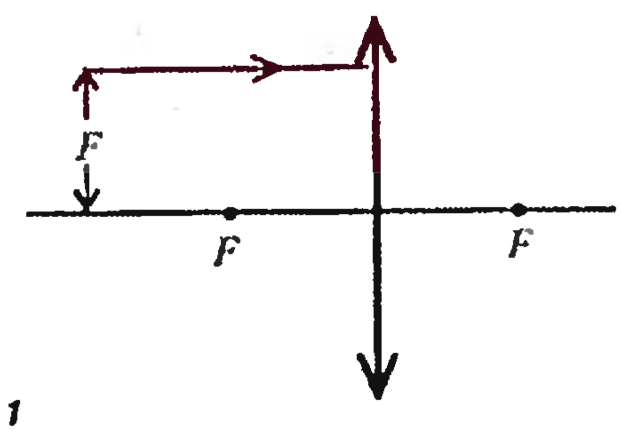


Рис. 1

Суммарный импульс фотонов, падающих на линзу в единицу времени, равен

$$p_1 = \frac{W}{\tau c}.$$

После преломления в линзе пучок проходит через фокус линзы и пересекает главную оптическую ось линзы под углом $\alpha = 45^\circ$. Импульс фотонов, прошедших линзу за единицу времени, составляет

$$p_2 = \frac{W}{2\tau c}$$

(коэффициент 1/2 учитывает поглощение в линзе). По второму закону Ньютона сила, подействовавшая на фотоны, равна изменению суммарного импульса фотонов за единичный интервал времени. На рисунке 2 показана соответствующая векторная диаграмма: $\vec{p}_1$ — импульс фотонов (в единицу времени) до взаимодействия с линзой, $\vec{p}_2$ — после взаимодействия и $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$ — их разность, которая и равна силе, подействовавшей на фотоны со стороны линзы. По третьему закону Ньютона в противоположную сторону (красная стрелка) будет направлена равная ей по величине сила реакции $\vec{F}$ со

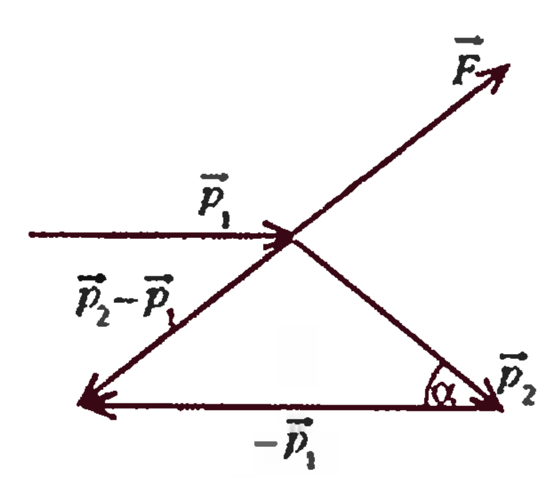


Рис. 2

стороны фотонов на линзу. Абсолютная величина этой силы легко находится из треугольника по теореме косинусов:

$$F = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\alpha} =$$

$$= \frac{W}{2\tau c}\sqrt{5-4\cos\alpha} \approx 1 \text{ Н}.$$

Задача 3. *Образовавшееся в результате ядерной реакции неподвижное ядро калия $^{40}_{19}K$ испускает γ-квант с энергией E_γ = 29,4 кэВ. Определите кинетическую энергию ядра после испускания γ-кванта. Одной атомной единице массы соответствует энергия E_1 = 931,5 МэВ.*

Сначала разберемся с ядром калия: из чего оно состоит и почему оно излучает γ-квант? Массовое число A = 40, следовательно, ядро состоит из 40 нуклонов, из которых 19 протонов, а остальные — нейтроны. Очевидно, что ядро находилось в возбужденном состоянии, а испущенный γ-квант является результатом перехода ядра либо в новое возбужденное состояние с меньшей энергией, либо в свое основное (устойчивое) состояние.

Кинетическую энергию ядра, появившуюся в результате отдачи, можно найти с помощью закона сохранения импульса системы ядро — γ-квант. До вылета γ-кванта импульс ядра был равен нулю, и после вылета γ-кванта импульс системы должен остаться нулевым:

$$p_я - \frac{E_\gamma}{c} = 0,$$

где $p_я$ — импульс ядра. Кинетическая энергия ядра равна

$$E_k = \frac{p_я^2}{2M} = \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2},$$

где M — масса ядра, а Mc^2 — энергия покоя ядра. По условию,

$$Mc^2 = AE_1.$$

После подстановки получим

$$E_k = \frac{E_\gamma^2}{2AE_1} \approx 0{,}01 \text{ эВ}.$$

Скажем несколько слов об энергии. Если к энергии γ-кванта добавить кинетическую энергию ядра, то получим разность энергий тех состояний ядра, в которых оно находилось до испускания γ-кванта и после испускания.

Задача 4. *При распаде нейтрального π-мезона образовались два γ-кванта с энергиями E_1 = 71 МэВ и E_2 = = 64 МэВ, которые летят в противоположных направлениях. Определите энергию покоя π-мезона и его скорость до распада. Указание: рассмотреть нерелятивистский случай.*

Обозначим через p импульс π-мезона до распада. О том, что π-мезон распался на лету, говорит тот факт, что энергии образовавшихся γ-квантов не равны. Мы будем рассматривать нерелятивистский случай — об этом можно судить по тому факту, что $E_1 - E_2 \ll E_1$.

По закону сохранения импульса можно записать

$$p = \frac{E_1}{c} - \frac{E_2}{c}.$$

Кинетическая энергия π-мезона до распада равна

$$E_k = \frac{p^2}{2M} = \frac{(E_1 - E_2)^2}{2Mc^2},$$

где M — масса π-мезона. Закон сохранения энергии позволяет записать

$$Mc^2 + E_k = E_1 + E_2,$$

или

$$Mc^2 + \frac{(E_1 - E_2)^2}{2Mc^2} = E_1 + E_2.$$

Для определения энергии покоя π-мезона получим квадратное уравнение

$$\left(Mc^2\right)^2 - (E_1 + E_2)Mc^2 + 0{,}5(E_1 - E_2) = 0,$$

откуда

$$Mc^2 = 134{,}8 \text{ МэВ}.$$

Понятно, что это значение близко к суммарной энергии γ-квантов.

Для определения скорости v π-мезона выразим его кинетическую энергию через эту скорость и приравняем к полученному ранее выражению для E_k:

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{(E_1 - E_2)^2}{2Mc^2}.$$

Отсюда

$$v = \frac{(E_1 - E_2)c}{Mc^2} = 1{,}5 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

Задача 5. *Катод фотоэлемента освещается монохроматическим светом с длиной волны λ_1 (рис.3). При отрицательном потенциале на аноде U_1 = = 1,6 В ток в цепи прекращается. При изменении длины волны света в β = = 1,5 раза для прекращения тока потребовалось подать на анод отрицательный потенциал U_2 = −1,8 В. Определите работу выхода материала катода.*

Сначала разберемся, почему при нулевой разности потенциалов между катодом и анодом в замкнутой цепи фотоэлемента течет ток и почему необходимо прикладывать задерживающую разность потенциалов, чтобы ток стал равным нулю.

При освещении фотокатода светом происходит взаимодействие квантов

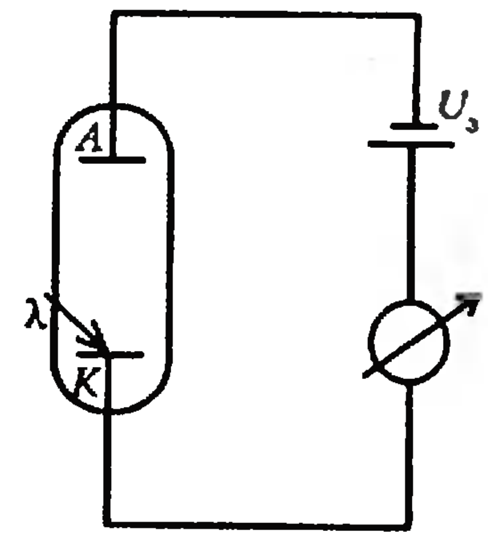


Рис. 3

света с электронами вещества, причем в случае внешнего фотоэффекта речь идет о слабо связанных с атомами электронах проводимости. Есть вероятность, что в результате этого взаимодействия фотон будет полностью поглощен электроном. (Это чисто релятивистский эффект, который невозможно понять и объяснить, основываясь на обычных классических представлениях.) Поглощенная электроном энергия кванта света переходит в его кинетическую энергию, и, если импульс электрона направлен к поверхности освещаемого катода, он может выйти за пределы катода в вакуум. Максимальная кинетическая энергия E_k электрона за пределами катода определяется уравнением Эйнштейна для фотоэффекта:

$$E_k = h\frac{c}{\lambda} - A,$$

где A — минимальная энергия, необходимая для удаления электрона из вещества в вакуум, которую и называют работой выхода. Поэтому, если $E_k > 0$, вылетевшие электроны смогут достигнуть анода, т.е. в цепи будет течь ток. Очевидно, что фототок станет равным нулю, если задерживающая разность потенциалов между катодом и анодом составит по модулю

$$U_з = \frac{E_k}{e},$$

где e — заряд электрона.

Теперь перейдем к решению нашей задачи. При освещении катода светом с длиной волны λ_1 можно записать

$$|U_1| = \frac{hc/\lambda_1 - A}{e}.$$

Во втором случае абсолютная величина задерживающего потенциала увеличилась, следовательно, длина волны света уменьшилась, поэтому

$$|U_2| = \frac{hc/\lambda_2 - A}{e} = \frac{hc\beta/\lambda_1 - A}{e}.$$

Складывая почленно два последних уравнения, получаем

$$A = \frac{e(U_2 - \beta U_1)}{\beta - 1} = 1{,}2 \text{ эВ} = $$
$$= 1{,}92 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Задача 6. *Найдите изменение длины волны света, излучаемого неподвижным атомом водорода, вследствие отдачи, которую испытывает ядро атома со стороны вылетевшего кванта света.*

Запишем законы сохранения энергии и импульса для изолированной системы атом водорода — фотон.

В начальный момент, до излучения фотона, эта система представляет собой неподвижный атом водорода, находящийся в возбужденном состоянии, т.е. его электрон занимает не самый низкий энергетический уровень E_1, а какой-то более высокий уровень E_n. Под E понимается полная энергия электрона в атоме: кинетическая плюс потенциальная, связанная с электростатическим взаимодействием электрона с ядром (заметим, что E всегда отрицательная величина). Возбуждение атома может быть вызвано неким внешним воздействием, например столкновением с другим атомом или свободным электроном или поглощением кванта света. Пусть разность энергий электрона в этом случае составляет

$$E_n - E_1 = h\nu_0.$$

Тогда полная энергия атома равна сумме энергии покоя ядра (протона) и энергии электрона:

$$W_1 = m_pc^2 + E_n,$$

а импульс атома равен нулю:

$$p_1 = 0.$$

После излучения атомом фотона с некоторой энергией $h\nu$ изолированная система будет включать в себя фотон и атом водорода, который вследствие отдачи приобретет некоторую скорость v. Полная энергия системы в этом случае будет равна

$$W_2 = m_pc^2 + E_1 + \frac{m_pv^2}{2} + h\nu,$$

а импульс системы составит

$$p_2 = \frac{h\nu}{c} - m_pv.$$

Согласно законам сохранения энергии и импульса, можно записать

$$m_pc^2 + E_n = m_pc^2 + E_1 + \frac{m_pv^2}{2} + h\nu$$

и

$$0 = \frac{h\nu}{c} - m_pv.$$

Учитывая, что $E_n - E_1 = h\nu_0$, из первого уравнения получим

$$h\Delta\nu = h\nu - h\nu_0 = -\frac{m_pv^2}{2}.$$

Нас не интересует величина скорости ядра отдачи, поэтому выразим ее из второго уравнения (закон сохранения импульса), подставим в последнее равенство и найдем относительное изменение частоты света:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{h\nu}{2m_pc^2} = -\frac{hc}{2m_pc^2\lambda}.$$

Поскольку для видимого диапазона длин волн $h\nu \sim 2$ эВ, а энергия покоя протона равна 938 Мэв, получаем $\Delta\nu/\nu \sim 10^{-9}$. При таких малых изменениях частоты можно записать

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta(c/\lambda)}{c/\lambda} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda}.$$

Тогда, заменив $\Delta\nu/\nu$ на $\Delta\lambda/\lambda$, окончательно получим

$$\Delta\lambda = \frac{h}{2m_pc} = 6{,}7 \cdot 10^{-16} \text{ м}.$$

Упражнения

1. Кусочек металлической фольги массой m = 1 мг освещается лазерным импульсом мощностью P = 15 Вт и длительностью τ = 0,5 с. Свет падает нормально к плоскости фольги и полностью отражается от ее поверхности в обратном направлении. Определите скорость, приобретенную фольгой в результате действия света.

2. Узкий пучок импульсного лазерного излучения с энергией W = 0,3 Дж и длительностью $\tau = 10^{-9}$ с падает на рассеивающую линзу параллельно ее главной оптической оси. Расстояние от пучка до главной оптической оси линзы равно $F/\sqrt{3}$, где F — фокусное расстояние линзы. Найдите величину средней силы, действующей на линзу со стороны света, если половина энергии лазерного излучения поглощается в линзе. Отражением от поверхностей линзы пренебречь.

3. До какого максимального потенциала зарядится уединенный медный шарик, если его облучать ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$ м? Работа выхода электрона для меди равна A = = 4,47 эВ.

4. Какую частоту фотона зарегистрирует неподвижный приемник, если фотон испущен движущимся со скоростью v атомом вдоль направления его движения? В случае неподвижного атома частота излучаемого фотона равна ν_0. *Указание.* Воспользуйтесь приближением: для $\alpha \ll 1$ $\sqrt{1+\alpha} = 1 + \alpha/2$.

НАМ ПИШУТ

ПРЕДЕЛ... В ДВА ХОДА

«Что общего у мата в два хода и предела последовательности?» — вопросы такого типа с веселыми ответами на них некоторое время назад были темами анекдотов и приписывались армянскому радио.

Однако наш читатель *Л.Костюков*, задавший нам этот вопрос, дал на него вполне вразумительный ответ. Давайте сформулируем строго, что значит выражение «белые дают мат в два хода». А вот что:

Существует такой ход белых Б1, что при любом ходе черных Ч1 найдется ход белых Б2, при котором черные получают мат.

А теперь давайте рядышком сформулируем утверждение о том, что белые не могут дать черным мат в два хода, и определение того, что последовательность $\{a_n\}$ имеет A своим пределом:

Для любого хода белых Б1 существует такой ход черных Ч1, что при любом ходе белых Б2 черные не получают мат.

Для любого положительного числа ε *существует такой номер* N, *что для любого* $N > n$ *выполняется условие* $|a_n - A| < \varepsilon$.

Итак, что же здесь общего? Ну конечно же, последовательность слов-предикатов: для любого — существует — для любого. Не правда ли, любопытно?

XXIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

IV (зональный) этап олимпиады проходил 18 — 23 марта 1997 года в Долгопрудном, Ростове-на-Дону, Белорецке и Новосибирске.

V заключительный этап проводился в Калуге 19 — 26 апреля.

Как всегда, соревнования проходили два дня, в каждый из которых участникам предлагалось решить четыре задачи.

Ниже мы публикуем задачи этих этапов (в списках задач по каждому классу задачи 1 — 4 предлагались в первый день, а задачи 5 — 8 — во второй).

Задачи

Зональный этап

8 КЛАСС

1. Докажите, что числа от 1 до 16 можно записать в строку, но нельзя записать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа.

Н.Агаханов

2. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более чем в полтора раза.

А.Шаповалов

3. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC взяты точки D и K, а на стороне AC — точки E и M так, что $DA + AE = KC + CM = AB$. Докажите, что угол между прямыми DM и KE равен 60°.

В.Произволов

4. На предприятии трудится 50 000 человек. Для каждого из них сумма количества его непосредственных начальников и его непосредственных подчиненных равна 7. В понедельник каждый работник предприятия издает приказ и выдает копию этого приказа каждому своему непосредственному подчиненному (если такие есть). Далее, каждый день работник берет все полученные им в предыдущий день приказы и либо раздает их копии всем своим непосредственным подчиненным, либо, если таковых у него нет, выполняет приказы сам. Оказалось, что в пятницу никакие бумаги по учреждению не передаются. Докажите, что на предприятии не менее 97 начальников, над которыми нет начальников.

Е.Малинникова

5. Докажите, что остроугольный треугольник полностью покрывается тремя квадратами, построенными на его сторонах как на диагоналях.

Н.Агаханов

6. Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором — 1?

А.Шаповалов

7. Найдите все такие пары простых чисел p и q, что $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

С.Токарев

8.[1] В Мехико для ограничения транспортного потока для каждой частной автомашины устанавливаются два дня недели, в которые она не может выезжать на улицы города. Семье требуется каждый день иметь в распоряжении не менее 10 машин. Каким наименьшим количеством машин может обойтись семья, если ее члены могут сами выбирать запрещенные дни для своих автомобилей?

И.Ященко

9 КЛАСС

1. Правильный 1997-угольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что среди них ровно один — остроугольный.

А.Шаповалов

2. На доске записаны числа 1, 2, 3, ..., 1000. Двое по очереди стирают по одному числу. Игра заканчивается, когда на доске остаются два числа. Если их сумма делится на три, то побеждает тот, кто делал первый ход, если нет — то его партнер. Кто из них выиграет при правильной игре?

А.Шаповалов

3. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более чем в полтора раза.

А.Шаповалов

4. Назовем «сочетанием цифр» несколько цифр, записанных подряд. В стране Роботландии некоторые сочетания цифр объявлены запрещенными. Известно, что запрещенных сочетаний конечное число и существует бесконечная десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочетаний. Докажите, что существует бесконечная периодическая десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочетаний.

А.Белов

5. Дан набор, состоящий из 1997 чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе равно 0.

А.Фомин

6. См. задачу 6 для 8 класса.

7. Дан треугольник ABC. Точка B_1 делит пополам длину ломаной ABC (составленной из отрезков AB и BC), точка C_1 делит пополам длину ломаной ACB, точка A_1 делит пополам длину ломаной CAB. Через точки A_1, B_1 и C_1 проводятся прямые l_A, l_B, l_C, параллельные биссектрисам углов BAC, ABC

[1] *См. также задачу 2 для 7 класса Математического праздника («Избранные задачи Московской математической олимпиады», «Квант», №3).*

и ACB соответственно. Докажите, что прямые l_A, l_B и l_C пересекаются в одной точке.

М.Сонкин

8. См. задачу 8 для 8 класса.

10 КЛАСС

1. Микрокалькулятор «МК-97» умеет над числами, занесенными в память, производить только три операции:

а) проверять, равны ли выбранные два числа;

б) складывать выбранные числа;

в) по выбранным числам a и b находить корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$, а если корней нет, выдавать сообщение об этом.

Результаты всех действий заносятся в память. Первоначально в памяти записано одно число x. Как с помощью «МК-97» узнать, равно ли это число единице?

И.Рубанов

2. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и N. Докажите, что если вершины A и C некоторого прямоугольника $ABCD$ лежат на окружности S_1, а вершины B и D — на окружности S_2, то точка пересечения его диагоналей лежит на прямой MN.

Л.Смирнова

3. m, n — натуральные числа. Докажите, что число $2^n - 1$ делится на число $\left(2^m - 1\right)^2$ тогда и только тогда, когда число n делится на число $m\left(2^m - 1\right)$.

О.Тен

4. Дан куб со стороной 4. Можно ли целиком оклеить 3 его грани, имеющие общую вершину, 16 бумажными прямоугольными полосками размерами 1×3?

Л.Емельянов

5. Дан набор, состоящий из 100 различных чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе положительно.

А.Фомин

6. В городе Мехико для ограничения транспортного потока для каждой частной автомашины устанавливаются один день в неделю, в который она не может выезжать на улицы города. Состоятельная семья из 10 человек подкупила полицию и для каждой машины они называют 2 дня, один из которых полиция выбирает в качестве «невыездного» дня. Какое наименьшее количество машин нужно купить семье, чтобы каждый день каждый член семьи мог самостоятельно ездить, если утверждение «невыездных» дней для автомобилей идет последовательно?

И.Ященко

7. Точки O_1 и O_2 — центры описанной и вписанной окружностей равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Окружности, описанные около треугольников ABC и O_1O_2A, пересекаются в точках A и D. Докажите, что прямая BD касается окружности, описанной около ΔO_1O_2A.

М.Сонкин

8. Докажите, что если

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{y+b}+\sqrt{z+c}=\sqrt{y+a}+\sqrt{z+b}+\sqrt{x+c}=\sqrt{z+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{y+c}$$

для некоторых a, b, c, x, y, z, то $x = y = z$ или $a = b = c$.

М.Сонкин

11 КЛАСС

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. Все вершины треугольника ABC лежат внутри квадрата K. Докажите, что если все их отразить симметрично относительно точки пересечения медиан треугольника ABC, то хотя бы одна из полученных трех точек окажется внутри K.

В.Дольников

3. Обозначим через $S(N)$ сумму цифр натурального числа N. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что

$$S\left(3^n\right) \ge S\left(3^{n+1}\right).$$

А.Белов

4. См. задачу 4 для 10 класса.

5. Члены Государственной Думы образовали фракции так, что для любых двух фракций A и B (не обязательно различных) $\overline{A \cup B}$ — тоже фракция (через $\overline{C}$ обозначается множество всех членов Думы, не входящих в C). Докажите, что для любых двух фракций A и B $A \cup B$ — также фракция.

А.Скопенков

6. Докажите, что если $1 < a < b < c$, то

$$\log_a\left(\log_a b\right)+\log_b\left(\log_b c\right)+\log_c\left(\log_c a\right)>0.$$

С.Токарев

7. Существуют ли выпуклая n-угольная ($n \ge 4$) и треугольная пирамиды такие, что четыре трехгранных угла n-угольной пирамиды равны трехгранным углам треугольной пирамиды?

Н.Агаханов, Р.Карасев

8. Для каких α существует функция $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, отличная от константы, такая, что

$$f\left(\alpha(x+y)\right)=f(x)+f(y)?$$

Л.Емельянов

Заключительный этап

9 КЛАСС

1. См. задачу М1609 (а) из «Задачника «Кванта».

2. Выпуклый многоугольник M переходит в себя при повороте на угол 90°. Докажите, что найдутся два круга с отношением радиусов, равным $\sqrt{2}$, один из которых содержит M, а другой содержится в M.

А.Храбров

3. Боковая поверхность прямоугольного параллелепипеда с основанием $a\times b$ и высотой c (a, b и c — натуральные числа) оклеена без наложений и пропусков прямоугольниками со сторонами, параллельными ребрам параллелепипеда, каждый из которых состоит из четного числа единичных квадратов. При этом разрешается перегибать прямоугольники через боковые ребра параллелепипеда. Докажите, что если c нечетно, то число способов оклейки четно.

Д.Карпов, С.Рукшин, Д.Фон-Дер-Флаасс

4. См. задачу М1610 (а) из «Задачника «Кванта».

5. Существуют ли действительные числа b и c такие, что каждое из уравнений $x^2 + bx + c = 0$ и $2x^2 + (b+1)x + c + 1 = 0$ имеет по два целых корня?

Н.Агаханов

6. В классе 33 человека. У каждого ученика спросили, сколько у него в классе тезок и сколько однофамильцев (включая родственников). Оказалось, что среди названных чисел встретились все целые от 0 до 10 включительно. Докажите, что в классе есть два ученика с одинаковыми именем и фамилией.

А.Шаповалов

7. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и CA в точках M, N и K соответственно. Прямая, проходящая через вершину A и параллельная NK, пересекает прямую MN в точке D. Прямая, проходящая через A и параллельная

MN, пересекает прямую NK в точке E. Докажите, что прямая DE содержит среднюю линию треугольника ABC.

М.Сонкин

8. См. задачу М1612 из «Задачника «Кванта».

10 КЛАСС

1. Решите в целых числах уравнение

$$\left(x^2-y^2\right)^2=1+16y.$$

М.Сонкин

2. Квадрат $n\times n$ $(n\geq 3)$ склеен в цилиндр. Часть клеток покрашена в черный цвет. Докажите, что найдутся две параллельные линии (две горизонтали, две вертикали или две диагонали), содержащие одинаковое количество черных клеток.

Е.Порошенко

3. См. задачу М1611 из «Задачника «Кванта».

4. Многоугольник можно разбить на 100 прямоугольников, но нельзя — на 99. Докажите, что его нельзя разбить на 100 треугольников.

А.Шаповалов

5. Существуют ли два квадратных трехчлена ax^2+bx+c и $(a+1)x^2+(b+1)x+(c+1)$ с целыми коэффициентами, каждый из которых имеет по два целых корня?

Н.Агаханов

6. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AC, AB и BC в точках K, M и N соответственно. Медиана BB_1 треугольника пересекает MN в точке D. Докажите, что точка O лежит на прямой DK.

М.Сонкин

7. Найдите все тройки натуральных чисел m, n и l такие, что $m+n=(\text{НОД}(m,n))^2$, $m+l=(\text{НОД}(m,l))^2$, $n+l=(\text{НОД}(n,l))^2$.

С.Токарев

8. См. задачу М1613 из «Задачника «Кванта».

11 КЛАСС

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. См. задачу М1610 (б) из «Задачника «Кванта».

3. См. задачу 3 для 10 класса.

4. Куб $n\times n\times n$ сложен из единичных кубиков. Дана замкнутая несамопересекающаяся ломаная, каждое звено которой соединяет центры двух соседних (имеющих общую грань) кубиков. Назовем отмеченными грани кубиков, пересекаемые данной ломаной. Докажите, что ребра кубиков можно покрасить в два цвета так, чтобы каждая отмеченная грань имела нечетное число, а всякая неотмеченная грань — четное число сторон каждого цвета.

М.Смуров

5. Рассматриваются всевозможные квадратные трехчлены вида x^2+px+q, где p, q — целые, $1\leq p\leq 1997$, $1\leq q\leq 1997$. Каких трехчленов среди них больше: имеющих целые корни или не имеющих действительных корней?

М.Евдокимов

6. Даны многоугольник, прямая l и точка P на прямой l в общем положении (т.е. все прямые, содержащие стороны многоугольника, пересекают l в различных точках, отличных от P). Отметим те вершины многоугольника, для каждой из которых продолжения выходящих из нее сторон многоугольника пересекают l по разные стороны от точки P. Докажите, что точка P лежит внутри многоугольника тогда и только тогда, когда по каждую сторону от l отмечено нечетное число вершин.

О.Мусин

7. Сфера, вписанная в тетраэдр, касается одной из его граней в точке пересечения биссектрис, другой — в точке пересечения высот, третьей — в точке пересечения медиан. Докажите, что тетраэдр правильный.

Н.Агаханов

8. См. задачу М1615 из «Задачника «Кванта».

Публикацию подготовил Н.Агаханов

Призеры XXIII Всероссийской математической олимпиады школьников

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Поярков Алексей — Рыбинск, гимназия, 8 кл.;

по 10 классам —

Дуров Николай — Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Дильман Степан — Челябинск, лицей 31,
Черепанов Евгений — Рыбинск, с.ш.17;

по 11 классам —

Уздин Сергей — Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Волк Денис — Москва, с.ш.57,
Фарутин Владимир — Санкт-Петербург, с.ш.610,
Дремов Владимир — Волгодонск, с.ш.24, 8 кл.,
Жиляев Владимир — Москва, с.ш.1543,
Петров Федор — Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Евсеев Антон — Москва, с.ш. 1260,
Мазин Михаил — Москва, с.ш.2,
Галкин Сергей — Москва, с.ш.2,
Горшков Алексей — Москва, с.ш.1543,
Тихомиров Сергей — Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Асомчик Александр — Новгород, с.ш. 117,
Певзнер Игорь — Киров, ФМЛ 35,
Хинцицкий Иван — Калуга, с.ш. 24;

по 10 классам —

Анно Ирина — Москва, с.ш.57,
Беленький Алексей — Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Розенберг Антон — Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Бахарев Федор — Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сопкина Екатерина — Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Плахов Андрей — Волгодонск, с.ш. 19/20;

по 11 классам —

Митрофанов Михаил — Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Лепинский Михаил — Челябинск, лицей 31,
Мищенко Андрей — Москва, СУНЦ МГУ,
Самойлов Борис — Ростов-на-Дону, с.ш. 33,
Клепцын Виктор — Москва, с.ш. 57,
Шаповалов Данил — Иваново, с.ш. 33,

Тухвебер Сергей — Брянск, лицей 1.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Карвонен Максим — Рыбинск, с.ш. 2, 8 кл.,
Лебедев Алексей — с.Семеново, Уренского р-на Нижегородской обл., Семеновская с.ш.,
Лешко Денис — Ангарск, с.ш. 10,
Лифшиц Юрий — Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Мелещук Елизавета — Санкт-Петербург, Академическая гимназия,
Баскаков Илья — Москва, с.ш. 710,
Лузгарев Александр — Киров, ФМЛ 35,
Черников Алексей — Королев Московской обл., с.ш. 4,
Бейлин Андрей — Ростов-на-Дону, с.ш.58,
Ершов Денис — Москва, с.ш. 2,
Бабенко Максим — Саратов, ФТЛ 1,
Зинин Евгений — Краснодар, с.ш. 87,
Алишев Равиль — д.Кадырово Заинкинского р-на, Татарстан, Татарско-турецкий лицей,
Шадрин Владимир — Киров, ФМЛ 35;

по 10 классам —

Етеревский Олег — Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Ткаченко Артем — Омск, с.ш. 88,
Водомеров Александр — Вологда, ВГЕМЛ,
Доценко Владимир — Москва, с.ш. 57,
Железняк Александр — Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Фирсова Татьяна — Саров, с.ш. 2,
Зинин Денис — Казань, ЭШЛ,
Рыбников Леонид — Москва, с.ш. 57,
Растатурин Алексей — Краснодар, с.ш. 48;

по 11 классам —

Малистов Алексей — Рязань, лицей 52,
Прудников Андрей — Москва, с.ш. 57,
Рафиков Евгений — Пермь, с.ш. 146,
Чернышев Сергей — Ярославль, с.ш. 33,
Шатохин Евгений — Армавир, гимназия 1,
Лившиц Евгений — Ижевск, с.ш. 30,
Новосельцев Андрей — Ростов-на-Дону, с.ш. 5,
Фирдман Илья — Омск, с.ш. 74,
Вашевник Андрей — Москва, с.ш. 57,
Злобин Сергей — Киров, ФМЛ 35,
Потапов Алексей — Сосновый Бор Ленинградской обл., с.ш. 8,
Спиридонов Антон — Киров, ФМЛ 35,
Петров Александр — Первоуральск, с.ш. 7,
Тимошенко Егор — Томск, с.ш. 7,
Федотовская Екатерина — Киров, ФМЛ 35.

ИНФОРМАЦИЯ

II МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ, ПОСВЯЩЕННАЯ ПАМЯТИ С.Н.БЕРНШТЕЙНА

II Международная конференция молодых ученых по математике, физике и информатике, посвященная памяти академика С.Н.Бернштейна, проходила 2–9 февраля 1997 года в Санкт-Петербурге в Аничковом дворце. Учредители конференции — математико-механический факультет Санкт-Петербургского Университета и Аничков лицей городского Дворца творчества юных.

Для участия в конференции было заявлено 49 работ, из которых Экспертный совет, состоящий из известных ученых — математиков и физиков, — рекомендовал 37.

Главной премией конференции награжден *Бабаин Юрий* (Аничков лицей) за доклад "Учет неоднородности гравитационного поля в кинематических задачах. Нахождение границы зоны достижимых целей" (руководитель — Ю.А.Антонов, оппонент — проф. Е.И.Бутиков).

Премиями конференции отмечены доклады:

Санькова Дмитрия (СПбГУ) "Аппроксимация полугрупп характерами" (руководитель — О.А.Снетков, оппонент — проф. М.М.Лесохин),

Старкова Константина (Аничков лицей) "Асимптотическая задача выпуклых оболочек" (руководитель — С.А.Берлов, оппонент — проф. А.В.Яковлев),

Ежикова Алексея "Учет неоднородности гравитационного поля в кинематических задачах. Определение параметров траектории" (руководитель — Ю.А.Антонов, оппонент — проф. Е.И.Бутиков),

Басиной Ольги "Расчет обтекания тел вращения идеальной жидкостью методом Фурье", (руководитель — Н.Ф.Трубицын, оппонент — проф. М.П.Юшков),

Симбирцева Александра "Библиотека объектов для создания графических интерфейсов на языке Turbo Pascal 7.0" (руководитель — Р.А.Семизаров, оппонент — проф. Н.К.Косовский).

По решению Совета математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета будет издан сборник научных трудов конференции.

В феврале 1998 года Оргкомитет планирует провести III Международную конференцию молодых ученых, посвященную памяти академика С.Н.Бернштейна, по математике, физике и информатике.

Участвовать в конференции приглашаются студенты и учащиеся до 19 лет. Не позднее 20 декабря 1997 года следует выслать на имя Оргкомитета статью или полный текст доклада с указанием секции и сообщить о себе необходимые для приглашения данные: *ФИО, домашний адрес, телефон, факс, адрес электронной почты, адрес и телефон организации, в которой Вы обучаетесь.* По решению Экспертного совета приглашения рассылаются с 15 по 25 января 1998 года.

Наш адрес:

191011 Санкт-Петербург, Невский пр., д.39, СПбГДТЮ, отдел науки, Оргкомитет III Международной конференции молодых ученых по математике, физике и информатике,
тел. (812) 310-13-13,
факс (812) 310-14-14.

Председатель Оргкомитета
И.А.Чистяков

XXXI Всероссийская олимпиада школьников по физике

С 19 по 25 апреля в городе Березники проходил заключительный этап очередной Всероссийской физической олимпиады школьников.

Ниже приводятся условия теоретических и экспериментальных задач, а также списки призеров олимпиады.

Теоретический тур

9 КЛАСС

1. Птица летит горизонтально на высоте H с постоянной скоростью u. Плохой мальчик из 9 класса замечает птицу в момент, когда она находится в точности над его головой, и сразу же стреляет из рогатки. Какой должна быть скорость птицы, чтобы мальчик никак не смог попасть в нее, если максимальная скорость вылета камня v_0? Сопротивлением воздуха пренебречь.

А.Мешков

2. Доска *1* лежит на такой же доске *2*. Обе они как целое скользят по гладкой ледяной поверхности со скоростью v_0 и сталкиваются с такой же доской *3*, верхняя поверхность которой покрыта тонким слоем резины. При ударе доски *2* и *3* прочно сцепляются. Чему равна длина каждой доски, если известно, что доска *1* прекратила движение относительно досок *2* и *3* из-за трения после того, как она полностью переместилась с *2* на *3*? Все доски твердые. Коэффициент трения между досками *1* и *3* равен μ. Трением между досками *1* и *2*, а также трением досок *2* и *3* о лед можно пренебречь.

Ю.Самарский

3. К ртутному термометру на уровне деления $t_н = 30$ °C прикреплен маленький нагреватель, температура которого поддерживается постоянной и равной 500 °C. Через некоторое время после установления теплового режима столбик ртути проходит через деление $t_0 = 20$ °C со скоростью $v_0 = 0{,}1$ град/с. Найдите, через какое время температура ртути достигнет 26 °C, считая теплопроводность ртути во много раз больше теплопроводности стекла. Теплоемкостью стекла можно пренебречь, а тепловой поток считать пропорциональным разности температур.

А.Мельниковский

4. В схеме, изображенной на рисунке 1, амперметр A_2 показывает ток 2 А. Найдите показания амперметра A_1, если известно, что резисторы имеют сопротивления 1 Ом, 2 Ом, 3 Ом и 4 Ом, а вольтметр V показывает напряжение 10 В. Все приборы считать идеальными.

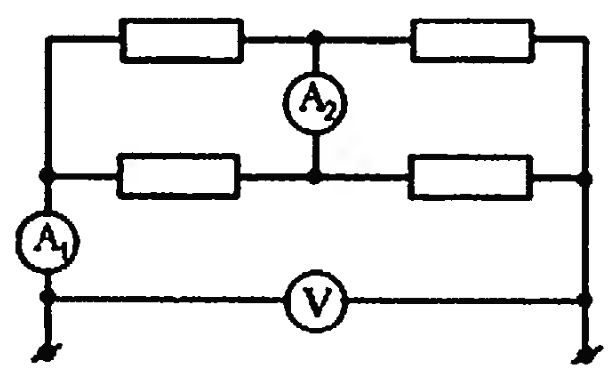


Рис. 1

А.Пушков

10 КЛАСС

1. Из тонкого шнура массой m с коэффициентом упругости k сделано кольцо радиусом r_0. Кольцо надевают на прямой круговой конус с углом при вершине 2α. Ось конуса вертикальна, его поверхность гладкая. 1) Найдите радиус r кольца, находящегося на конусе. 2) До какой угловой скорости надо раскрутить кольцо вместе с конусом вокруг оси конуса, чтобы радиус кольца, находящегося на конусе, стал $2r$?

В.Чивилёв

2. В горах проведена линия электропередачи (рис.2). Масса провода между двумя опорами m, его длина L. Расстояние по вертикали между нижней точкой провода B и местом крепления его к верхней опоре в точке A равно H. Длина участка AB провода равна l. Найдите максимальную силу натяжения провода.

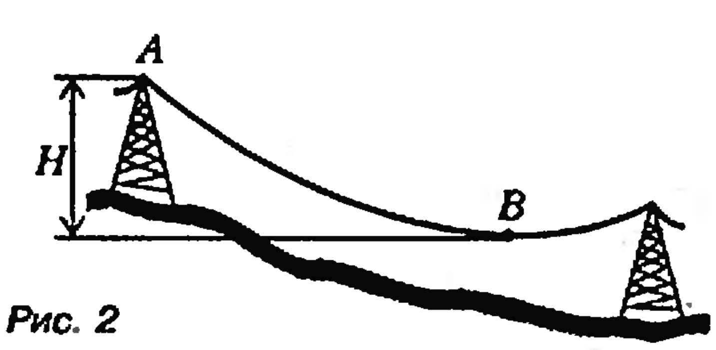


Рис. 2

В.Чивилёв

3. В горизонтально расположенном цилиндре под поршнем, который может перемещаться без трения, находится смесь из 75% кислорода и 25% гелия по массе. В результате окисления железной стружки, имеющейся в цилиндре, весь кислород вступил в реакцию с железом, образовалось 2 моля твердого окисла F_2O_3 и через стенки цилиндра ушло наружу количество теплоты $Q = 1{,}642$ МДж. Во время процесса окисления поддерживалась постоянная температура 25 °С, а внешнее давление было равно нормальному атмосферному давлению. 1) На сколько процентов величина Q больше, чем модуль изменения внутренней энергии системы (т.е. вещества внутри цилиндра)? 2) Во сколько раз изменилась плотность газа в цилиндре?

В.Чивилёв

4. Очень длинная цепочка составлена из батарей с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r и резисторов с сопротивлением R, как показано на рисунке 3. Определите ЭДС $\mathcal{E}_0$ и внутренне сопротивление r_0 эквивалентной батареи.

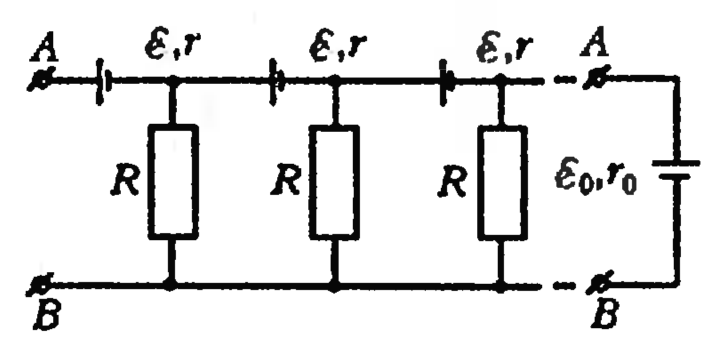


Рис. 3

С.Козел

5. Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли рисунок с оптической схемой (рис.4). От времени чернила выцвели, и на бумаге остались видны только предмет (стрелка) и его изображение, даваемое тонкой линзой. 1) Восстановите построением по имеющимся данным пол-

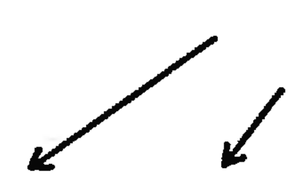


Рис. 4

ожение линзы. 2) Найдите положения фокусов линзы. 3) Можно ли, исходя из рисунка, сказать, какая (собирающая или рассеивающая) была линза?

В.Слободянин

11 КЛАСС

Автор всех задач — В.Можаев

1. Горизонтально расположенная упругая пружина массой M под действием силы, равной ее весу Mg, растягивается (или сжимается) на величину Δx_0. 1) Чему будет равно удлинение данной пружины, если ее подвесить за один конец (без груза)? 2) Чему будет равен период колебаний груза массой m, скрепленного с одним из концов данной пружины, если второй конец пружины неподвижен, а груз скользит по гладкой горизонтальной поверхности? Деформация пружины во всех случаях мала по сравнению с длиной недеформированной пружины.

2. Вертикально расположенный цилиндрический сосуд радиусом R полностью заполнен водой и герметично закрыт жесткой крышкой. На расстоянии $R/2$ от оси симметрии цилиндра расположены три маленьких одинаковых шарика радиусом r. Плотность материала шарика *1* меньше плотности воды ρ_0, шарика *2* равна ρ_0, а шарика *3* больше ρ_0. Цилиндр медленно раскручивают до угловой скорости вращения ω. 1) Где будут находиться шарики во вращающемся цилиндре и почему? 2) Определите величину и направление результирующей силы давления со стороны воды на каждый шарик в их новых положениях равновесия. Силой трения о дно и крышку цилиндра пренебречь.

3. В сверхпроводящем тонком кольце радиусом R, индуктивностью L и массой M течет наведенный ток I_0. Кольцо, подвешенное на тонкой неупругой нити, опускают в область горизонтального однородного магнитного поля с индукцией B. В устойчивом положении равновесия угол между вектором $\vec{B}$ и его проекцией на плоскость кольца равен α. 1) Определите зависимость угла α от начального тока I_0 в кольце. Постройте график $\alpha = \alpha(I_0)$. 2) Найдите зависимость установившегося тока I в кольце от величины начального тока I_0. Постройте график $I = I(I_0)$. 3) Для случая, когда $I_0 > \pi R^2 B/L$, определите минимальную работу, которую необходимо совершить, чтобы вынуть кольцо из магнитного поля.

4. Горизонтально расположенные неподвижные пластины *1* и *2* плоского конденсатора, расстояние между которыми d, подключены к источнику регулируемого постоянного напряжения (рис.5). На пластине *2* лежит тонкая проводящая незаряженная пластина *3* массой M и имеет хороший электрический контакт с пластиной *2*. Все пластины имеют одинаковые размеры, а площадь каждой пластины равна S. 1) При каком минимальном напряжении источника пластина *3* сможет оторваться от пластины *2* и достигнуть пластины *1*? 2) Чему будет при этом равна скорость пластины *3* в момент касания пластины *1*?

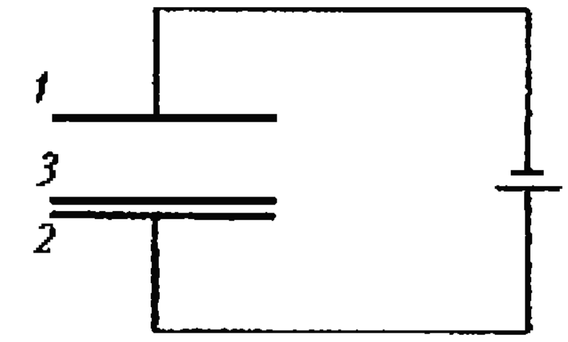


Рис. 5

5. Оптическая схема состоит из тонкой собирающей линзы с известным фокусным расстоянием F и плоского зеркала (рис.6). Точечный источник света дает два изображения в линзе, которые расположены на одной из побочных оптических осей линзы. Одно из изображений является действительным и находится на известном расстоянии от линзы (пунктирная линия). Построением найдите положения источника и его изображений в линзе. Отраженным от поверхности линзы светом пренебречь.

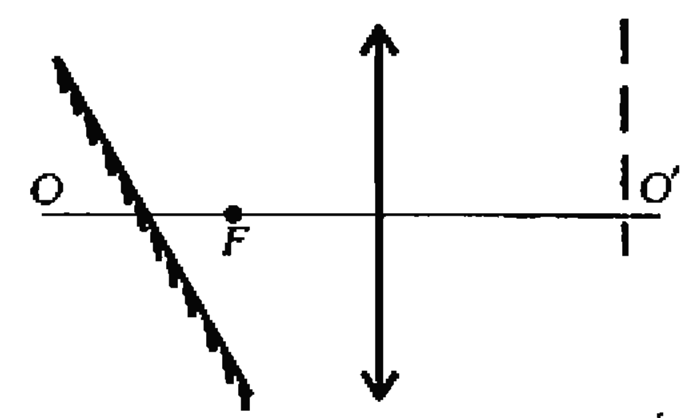


Рис. 6

Экспериментальный тур

Все задачи подготовил В.Ефимов

9 КЛАСС

1. Исследуйте «черный ящик».

Оборудование: «черный ящик» — закрытая банка из-под кофе, частично заполненная водой, в которой находится твердое тело с прикрепленной к нему проволокой, выходящей наружу через малое отверстие в крышке банки; динамометр; линейка; миллиметровка.

Примечание: плотность воды равна 1000 кг/м^3.

2. Определите с наибольшей точностью плотность и удельную теплоемкость неизвестного металла. Плотность воды 1000 кг/м^3, удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·град).

Оборудование: два калориметра; стеклянный или пластмассовый стакан; сосуды с горячей и холодной водой ($t_г$ = 60 – 70 °С, $t_х$ = 10 – 15 °С); кусочки неизвестного металла; термометр; измерительный цилиндр (мензурка); нитки.

10 КЛАСС

1. А. Исследуйте зависимость удлинения мягкой пружины под действием ее собственного веса от числа витков в висящей части пружины. Б. Исследуйте зависимость периода колебаний висящей пружины под действием ее собственного веса от числа витков в висящей части пружины. В. Исследуйте зависимость коэффициента упругости пружины от числа витков в ней. Г. Определите массу пружины.

Оборудование: мягкая пружина; штатив с лапкой; линейка; шарик из пластилина массой 10 г; миллиметровка; часы с секундной стрелкой; деревянный брусок.

2. Вычислите с наибольшей точностью ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока и емкость двух электролитических конденсаторов.

Оборудование: два конденсатора неизвестной емкости; источник постоянного тока с неизвестной ЭДС и внутренним сопротивлением; вольтметр лабораторный на 6 В с заданным сопротивлением; резисторы сопротивлением R = 2,70 кОм ± 0,03 кОм; часы с секундной стрелкой.

Внимание! Электролитические конденсаторы полярные. На проводе, соединенном с положительным полюсом, завязан узел.

11 КЛАСС

1. А. Снимите вольт-амперную характеристику «черного ящика». Б. Начертите схему наиболее простой электрической цепи с такой характеристикой. В. Определите основные параметры всех элементов, входящих в выбранную Вами схему. Возможные элементы «черного ящика»: резисторы, конденсаторы, лампочки, диоды, катушки, источники тока.

Оборудование: «черный ящик» с двумя выводами; аккумулятор; лабораторный вольтметр на 6 В; лабораторный амперметр на 2 А; лабораторный реостат на 6 Ом; соединительные провода; миллиметровка.

Примечание: во избежание перегрева приборов не оставляйте надолго включенной цепь при силе тока больше 1 А.

2. Определите фокусное расстояние, радиусы кривизны поверхностей и показатель преломления стекла собирающей и рассеивающей линз.

Оборудование: очковая вогнуто-выпуклая линза и двояковогнутая линза на подставках; линейка; экран; деревянный брусок длиной около метра; лампочка на подставке; аккумулятор; провода.

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Коровин

Призеры XXXI Всероссийской олимпиады школьников по физике

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Мартьянов Владимир — Нижний Новгород, лицей 40,
Чудновский Александр — Челябинск, школа 96;

по 10 классам —

Имамбеков Адилет — Москва, СУНЦ МГУ,
Цыганков Дмитрий — Москва, СУНЦ МГУ,
Турицын Константин — Новосибирск, школа 130,
Барыгин Илья — Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Широковский Николай — п.Заречный Пензенской обл., школа 230;

по 11 классам —

Тиснек Дмитрий — Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Воронов Артем — Челябинск, физико-математический лицей.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Каримов Айдар — Березники, школа 3,
Канделаки Вахтанг — Вологда, естественно-математический лицей,
Шапиро Александр — Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Черемухин Антон — Сергиев Посад, физико-математическая школа 2,
Шипулина Галина — Березники, школа 3,
Хегай Александр — Новосибирск, школа 130,
Васильев Михаил — Долгопрудный, школа 5;

по 10 классам —

Кондратенко Ростислав — Москва, школа 444,
Демаков Александр — Березники, школа 3,
Рубцов Григорий — п.Черноголовка Московской обл., школа 82,
Мартьянов Кирилл — Нижний Новгород, лицей 40,
Слизовский Сергей — Санкт-Петербург, академическая гимназия,
Альмухамедов Риф — Ноябрьск, лицей 10,
Соболев Дмитрий — Нижний Новгород, лицей 40,
Храмцов Дмитрий — Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Абанин Дмитрий — Ростов-на-Дону, школа 56,
Барышев Владимир — Нижний Новгород, лицей 40;

по 11 классам —

Ильдуганов Николай — Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Малышев Дмитрий — Рыбинск, лицей 2,
Змеев Дмитрий — Березники, школа 3,
Синило Павел — Фрязино, школа 1,
Пестун Василий — Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Жолобов Александр — Киров, физико-математический лицей 35,
Дельцов Василий — Чебоксары, школа 54,
Павловский Евгений — Санкт-Петербург, гимназия 30,
Мовчан Игорь — Москва, школа 57,
Сырицын Сергей — Саратов, ФМЛ 1,
Молганов Антон — Березники, школа 3,
Ефимов Артем — Березники, школа 3,
Игнатьев Алексей — Чебоксары, гимназия 34,
Акимов Вадим — Тула, лицей 73;

по 10 классам —

Сидоренко Игорь — Кирово-Чепецк, школа 6,
Луценко Евгений — Владимир, лицей 1,
Макрушин Сергей — Липецк, школа-лицей 44,
Болотин Игорь — Москва, лицей 1523,
Захидов Александр — Москва, школа 444,
Гагарин Максим — Пермь, школа-гимназия 17,
Каширин Александр — Березники, школа 3,
Макаров Вячеслав — Березники, школа 3;

по 11 классам —

Любинский Илья — Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Кулида Дмитрий — Москва, гимназия 1506,
Бодров Сергей — Нижний Новгород, лицей 40,
Чувиков Алексей — Ноябрьск, школа-лицей 10,
Бутыгин Александр — Северодвинск, школа 17,
Русаков Александр — Москва, СУНЦ МГУ,
Кожемяк Алексей — Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Макаров Алексей — Сергиев Посад, ФМЛ 2,
Компанеец Роман — Москва, лицей 1523,
Видьма Константин — Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Колеватов Родион — Санкт-Петербург, академическая гимназия,
Лесовой Дмитрий — Воронеж, колледж 1,
Дубинкин Роман — Березники, школа 3.

Первые международные математические соревнования Саманйолу колледжа в Турции

С 27 августа по 2 сентября 1996 года в столице Турции Анкаре проходила необычная математическая олимпиада, организатором которой стал Саманйолу колледж — одно из самых известных и престижных средних учебных заведений Турции. Устроители олимпиады решили провести математические соревнования по известному, хорошо отработанному сценарию «больших» международных олимпиад, но с участием не только национальных сборных команд, а и команд отдельных регионов и даже школ из разных — в основном исламских — стран мира.

В результате на соревнования прибыли 25 команд из 14 стран. Большая часть команд представляла бывшие республики СССР. Так, Россию, кроме сборной РФ, представляли команды Астрахани, Башкортостана, Дагестана, Татарстана, Москвы, Новосибирска, Санкт-Петербурга, Тувы, Якутии.

Участвовали в соревнованиях также команды всех бывших советских республик Средней Азии, Казахстана (2 команды), Азербайджана, Грузии, Молдовы.

По итогам соревнований из 116 участников 12 человек были награждены золотыми медалями, 18 — серебряными и 29 — бронзовыми.

Лучшие результаты российских школьников таковы: Александр Басыров и Рустем Гарифуллин из Уфы, а также Дмитрий Шкурко из Новосибирска награждены золотыми медалями, Равиль Алишев (Казань), Дарья Еттянова (Якутск), Дмитрий Прохоренко (Москва) и Григорий Спивак (Уфа) — серебряными медалями, а Борис Бадмаев, Надежда Буханцова, Александр Зевайкин, Иван Клевцов, Андрей Павликов (все — Москва), Алексей Афанасьев (Якутск) и Семен Устименко (Новосибирск) получили бронзовые медали.

В командном зачете сборной Югославии в упорной борьбе удалось занять первое место, оставив хозяев — сборную Турции — на втором. На третьем — Азербайджан, на четвертом — Казахстан. Лучшая из российских — сборная Башкортостана — оказалась на пятом месте.

Соревнования были очень хорошо и четко организованы. Культурная программа, включавшая в себя экскурсии по Анкаре и поездку в Стамбул, доставила участникам огромное удовольствие.

Особенно сильное впечатление произвела церемония закрытия олимпиады, проходившая 1 сентября в одном из лучших дворцов спорта Анкары в присутствии большого числа зрителей (по оценке на взгляд — несколько тысяч человек) и сопровождавшаяся выступлениями министров, деятелей просвещения и культуры, крупных ученых Турции, вручавших награды победителям. Выше всяких похвал были концертные номера музыкантов и певцов, прозвучавшие на церемонии.

То, что эти соревнования названы первыми, позволяет надеяться, что родилась еще она добрая традиция в международном сотрудничестве всех, кто занимается пропагандой математических знаний.

Ниже публикуются задачи, предлагавшиеся на олимпиаде. Отметим, что наиболее сложной оказалась задача 2, ее решили всего 10 человек. Остальные задачи оказались примерно одинаковыми по сложности: с каждой из них справились 30 — 35 участников.

Задачи

Первый день

1. Среди первых 1996 натуральных чисел выбрано $998 + n$ $(1 \le n \le 998)$ различных произвольных чисел. Докажите, что среди выбранных всегда найдутся $2n$ чисел таких, что их сумма равна $1997n$.

2. Окружность с центром O касается сторон AB и AC (или их продолжений) треугольника ABC в точках B и P соответственно. Прямая OH перпендикулярна BC и пересекается с PB в точке K. Докажите, что AK делит отрезок BC пополам.

3. Решите уравнение

$$[x]+[2x]+[3x]+\ldots+[nx]=n^2,$$

где n — натуральное число и $[x]$ означает целую часть числа x.

Второй день

4. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ со стороной a. Две точки M и N одновременно начинают двигаться с одинаковыми скоростями по ребрам куба, причем M — по пути AB, BC, CC', а N — по пути $C'D'$, $D'A'$, $A'A$. Обозначим расстояние между A и M через x (очевидно, что $C'N = x$). Вычислите квадрат расстояния MN в терминах a и x. При каком расположении M и N расстояние между этими точками а) максимально; б) минимально?

5. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены прямоугольники ABB_1B_2 и ACC_1C_2 соответственно, причем $AC_2 = AB$ и $AB_2 = AC$. Прямые BC_2 и B_2C пересекаются в точке S. Докажите, что а) угол BSC — прямой; б) точка S лежит на прямой B_1C_1.

6. Будем называть натуральное число a квадратично совершенным тогда и только тогда, когда найдутся натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ такие, что

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2=a$$

и

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\ldots+\frac{1}{a_k^2}=1.$$

а) Докажите, что квадратично совершенных чисел бесконечно много.

б) Докажите, что число 1996 квадратично совершенно.

Публикацию подготовили
А. Егоров, К. Йешилйурт,
Ш. Цыганов

ЗАДАЧИ РОМЫ ТРАВКИНА

Несколько месяцев назад мы знали про Рому Травкина только то, что он один из победителей конкурса нашего журнала «Математика 6–8» и что он живет в Липецке. И только когда в редакцию пришел его отец, чтобы забрать причитающиеся Роме награды и грамоту, мы узнали много необычного и неожиданного. Во-первых, мы узнали, что Роме десять лет (а задачи конкурса он решал в девять). Во-вторых, что он участвует в олимпиадах для старшеклассников и выступает успешно. В-третьих, что Рома увлекается теорией чисел и проективной геометрией, с которой он познакомился по одной из статей в «Кванте». И не просто увлекается, а увлекается творчески. Не просто решает задачи из сборников, а придумывает их сам. В том, что его задачи осмысленные и интересные, вы убедитесь, познакомившись с приведенной ниже подборкой. Любопытно, что некоторые из этих задач — известные теоремы элементарной геометрии, «открытые» Ромой самостоятельно.

Ясно, что Рома — человек талантливый. Но он еще и очень мужественный и сильный человек. И это без всяких скидок на детский возраст. От Роминого папы мы узнали, что Рома с рождения поражен тяжелым недугом. Он прикован к коляске (ноги почти не действуют), плохо владеет руками, не может писать и с большим трудом говорит — его понимают только близкие люди. Все его мысли, идеи, решения задач записывает его отец, Михаил Борисович, который проводит с ним большую часть своего времени. Он же помогает Роме участвовать в олимпиадах, в присутствии представителей оргкомитета в отведенное время записывая со слов Ромы решения конкурсных задач.

Когда узнаешь о сложной судьбе и неординарном даровании Ромы Травкина, возникает естественное желание — помочь. Как? Мы не знаем. Многое зависит от самого мальчика, от его желания бороться. Он упорно работает по различным медицинским методикам, и уже наметились первые шаги, пусть пока не к выздоровлению, а хотя бы к улучшению его состояния. Одна из важных проблем — научиться эффективно работать с компьютером, может быть специализированным, чтобы иметь возможность записывать свои мысли самому, когда захочется.

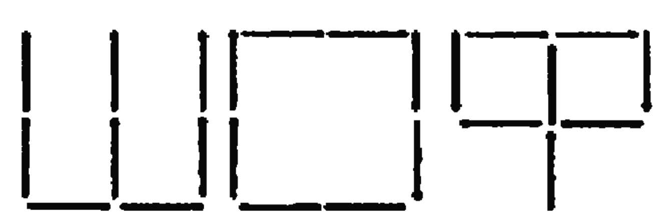
Пожелаем Роме успеха и удачи в его борьбе и трудах, в том числе — математических. Если же вы захотите написать Роме, подбодрить его, поделиться своими мыслями, — напишите на адрес редакции с пометкой «Для Ромы Травкина».

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что для любого натурального n число $6^{n+2}+7^{2n+1}$ делится на 43.

2. Докажите, что если $n > 5$, то хотя бы одно из чисел $n-2$, n, $n+2$ не является простым числом.

3 (Головоломка). Квадрат состоит из 4 маленьких квадратиков. На любой стороне маленького квадратика может лежать спичка (на общей стороне двух квадратиков может лежать только одна спичка). Любой квадратик можно повернуть на 90° вместе со спичками, лежащими на его сторонах. Требуется расположить спички в виде буквы Ш. Попытайтесь получить, вращая квадратики, конфигурации, указанные на рисунке.



4. Задана таблица $n\times n$ действительных чисел. Разрешается одновременно поменять знаки у всех чисел одной строки или одного столбца. Такая замена представляет собой одно элементарное преобразование. Некоторую таблицу можно получить из исходной после некоторого числа элементарных преобразований. Докажите, что эту же таблицу можно получить в результате не более чем n некоторых элементарных преобразований.

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Существует ли внутри него точка O такая, что $OA = AB$, $OB = BC$, $OC = CD$, $OD = DA$?

6. Докажите, что высоты треугольника с рациональными длинами сторон делят соответствующие стороны на отрезки рациональной длины.

7. На сторонах угла с вершиной O взяты произвольные точки A и C, а на его биссектрисе — точка B так, что $OB^2 = OA\cdot OC$. Докажите, что угол ABC не зависит от выбора точек A и C.

8. Докажите, что среди $2n$ первых натуральных чисел найдется не менее n^2 пар взаимно простых.

9. Докажите, что для любого натурального n выполняется равенство

$$(1!2!\ldots n!)(1^1 2^2\ldots n^n)=n!^{n+1}.$$

10. Докажите, что величина, обратная радиусу вписанной в треугольник окружности, равна сумме величин, обратных высотам треугольника, и равна сумме величин, обратных радиусам вневписанных окружностей этого треугольника.

11. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что центр вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$ окружности совпадает с ортоцентром треугольника ABC.

12. Нарисуйте график функции

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\left[\frac{x}{2^n}+\frac{1}{2}\right]^2$$

(x — действительное число, квадратными скобками обозначена целая часть).

13. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке K. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ACK и BCK, касаются отрезка CK в одной и той же точке.

14. Три хорды A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 некоторой окружности (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Докажите, что если точки пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1, A_2B_3 и A_3B_2, A_3B_1 и A_1B_3 существуют, то они лежат на одной прямой.

15. Точки A и B называются сопряженными относительно окружности S, если существуют точки K_1, L_1, K_2, L_2, лежащие на окружности S, такие, что A есть точка пересечения прямых K_1K_2 и L_1L_2, а B есть точка пересечения прямых K_1L_2 и L_1K_2. (В случае совпадения некоторых двух из точек K_1, L_1, K_2, L_2 считаем, что прямая, проведенная через них, есть касательная к окружности.)

а) Докажите, что геометрическое место точек, сопряженных с некоторой заданной точкой A относительно S, есть некоторая прямая l_A.

б) Обозначим через O центр окружности S. Докажите, что точка B пересечения прямых l_A и AO получается путем преобразования инверсии из точки A относительно окружности S.

в) Докажите, что S есть окружность Апполония по отношению к отрезку AB.

г) Выведите из а) принцип двойственности точек и прямых в проективной геометрии.

16. Дан четырехугольник $KLMN$. Прямые KL и MN пересекаются в точке A, прямые KN и LM — в точке B, прямые KM и LN — в точке C. Прямые AC и LM пересекаются в точке P, а прямые BC и MN — в точке Q. Докажите, что прямые LN, PQ и AB пересекаются в одной точке или параллельны.

17. Точки A, B, C попарно сопряжены (см. задачу 15) относительно окружности S с центром O. Докажите, что O есть ортоцентр треугольника ABC.

18. Дан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, а диагонали четырехугольника — в точке Q. Прямая PQ пересекает стороны AD и BC, соответственно, в точках K и L. Обозначим через R точку пересечения диагоналей четырехугольника $KLCD$, а через M и N — соответственно, точки пересечения прямой PR с прямыми AD и BC. Докажите, что

$$\frac{AM}{MD}=3\frac{AK}{KD}.$$

20. Докажите, что наименьшее общее кратное натуральных чисел, не превосходящих n, не превосходит $N^{\pi(n)}$, где $\pi(n)$ — количество простых чисел, не превосходящих n.

ШКОЛА «АВАНГАРД» — ШКОЛА ДЛЯ ВСЕХ

Как подготовиться в вуз, в физико-математическую школу или лицей, если ограничен в средствах или живешь в небольшом городке или деревне? Конечно же, поступить во Всероссийскую школу математики и физики (ВШМФ) «АВАНГАРД». Эта школа, учрежденная Министерством общего и профессионального образования РФ и существующая уже почти 10 лет, имеет большой практический опыт ЗАОЧНОГО обучения школьников:

по физике — с 9 по 11 класс (включая двухлетний углубленный курс);

по математике — с 7 по 11 класс.

В этом учебном году школа открывает 8 класс по физике, а для учащихся 10 и 11 классов проводит набор на курс «Математика для будущих экономистов».

В школе «АВАНГАРД», в зависимости от знаний, Вы можете выбрать программу обучения, доступную Вам. Всего программ три: «*А*», «*В*» и «*С*». Освоил программу «*А*» — открыта дорога в большинство областных вузов, а прошел полный курс по программе «*С*» — и можешь смело идти в МИФИ, МГТУ и т.п. Плата за обучение — самая доступная. Существует возможность занятий сразу по двум программам «*А*»+«*В*» или «*В*»+«*С*».

За последние пять лет 90% наших выпускников поступили в вузы! И это закономерно, так как методики и задачи разработаны лучшими преподавателями МИФИ и МФТИ.

Учебный год в школе — с 1 сентября по 30 июня. Прием в школу ведется круглогодично. Достаточно прислать личное заявление на адрес школы и оплатить обучение. Стоимость обучения зависит не от сложности программы («*А*», «*В*» и «*С*»), а только от класса и не превышает 2–3 минимальных месячных зарплат за полный годичный курс обучения по данному предмету.

Школа «АВАНГАРД» совместно с Министерством общего и профессионального образования РФ и при участии журнала «Квант» ежегодно проводит:

— межобластную олимпиаду по математике и физике (заочный тур; результаты олимпиады 1996 года см. в «Кванте» №4);

— межгосударственную конференцию одаренных школьников и очный тур олимпиады.

Ниже приводятся тестовые вступительные задания по математике и физике по программе «*С*».

Вам нужно:

— выбрать предмет, класс, программу и написать заявление о приеме в школу (в произвольной форме);

— решить выбранный вариант задания (не обязательно весь!);

— выслать нам заявление и решенный вариант (с пометкой «Квант»), а получив наш ответ, заполнить учетную карточку и прислать ее нам вместе с копией чека об оплате.

На курс «Математика для будущих экономистов» принимаются:

— учащиеся 10 и 11 классов школы «АВАНГАРД» из числа занимающихся по математике по программам «*В*» или «*С*» (или «*В*»+«*С*»);

— все желающие, успешно решившие вступительные задания для 10 и 11 классов.

Наш адрес:

115551 Москва, Ореховый бульвар, д.11, кор.3, ВШМФ «АВАНГАРД».

Тестовое вступительное задание по математике

Программа «*С*»

7 класс

1. Вычислите

$$4{,}07-5{,}49+8{,}93-1{,}51+\frac{4{,}2:6-3\frac{1}{3}\cdot 0{,}3}{7{,}5:0{,}5}.$$

2. Докажите, что число 123456789 является составным.

3. Запишите число 1000 с помощью восьми одинаковых цифр и знаков арифметических действий.

4. Число содержит 4 сотни, b десятков и c единиц. При каких значениях b и c данное число кратно 30?

5. Три класса школьников сажали деревья. Первый класс посадил a деревьев, второй — 70% того, что посадил первый, а третий класс — на 5 деревьев больше второго. Сколько деревьев посадили три класса?

8 класс

1. Упростите выражение

$$(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)$$

и вычислите его значение при $x = -0{,}4$.

2. Решите уравнение

$$\frac{8(x+10)}{15} - 24\frac{1}{2} = 7\frac{x}{10} - \frac{2(11x-5)}{5}.$$

3. Известно, что $x + \frac{1}{x} = 3$. Найдите значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

4. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, на 54 больше данного числа. Найдите это число.

5. Постройте график функции

$$\frac{y-x}{x-1} = -2.$$

9 класс

1. Натуральное пятизначное число A имеет в разряде десятков цифру 8. Если эту цифру десятков переставить в начало числа A, сохранив порядок остальных цифр, то вновь полученное пятизначное число будет больше A на 69570. Определите число A, если известно, что оно кратно 6.

2. Решите неравенство $ax + 1 > 0$.

3. Постройте график функции

$$|x| + |y| = 2.$$

4. Произведение двух целых чисел равно 216, а их наименьшее общее кратное равно 36. Найдите эти числа.

5. Смешали P%-й и 10%-й растворы соляной кислоты и получили 600 г 15%-го раствора. Сколько грамм каждого раствора было взято?

10 класс

1. Решите уравнение

$$\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6.$$

2. Определите, при каких значениях параметра a оба корня уравнения

$$x^2 + 2(a-4)x + a^2 + 6a = 0$$

положительны.

3. Длины сторон треугольника равны 4, 5 и 7 см. Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

4. Решите уравнение

$$\left|x^2 - 9\right| + \left|x^2 - 4\right| = 5.$$

5. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{1-ax}{-2x^2 + 6x - 7}}.$$

11 класс

1. Решите неравенство

$$x(x+1)(x+2)(x+3) < 48.$$

2. Найдите площадь наибольшего прямоугольника, который можно вписать в правильный треугольник со стороной a.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = a - \sqrt{x^2 + 6x + 9}.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin x + \left(0{,}04c^2 + 1{,}2c\right)\cos\frac{y}{5} = c + 8, \\ \sin x + 20\cos\frac{y}{5} = -21. \end{cases}$$

5. Сторона равностороннего треугольника равна a. На высоте этого треугольника построен новый равносторонний треугольник. На высоте нового треугольника построен еще один равносторонний треугольник и т.д. до бесконечности. Найдите сумму периметров и сумму площадей всех этих треугольников.

Тестовое вступительное задание по физике

Программа «С»

8 класс[1]

1. На рисунке 1 изображены четыре тела одной и той же массы. На тела *2* и *4* поставлены гири, тела *3* и *4* помещены на катки. При равномерном движении какого из тел по горизонтальной поверхности сила трения наибольшая?

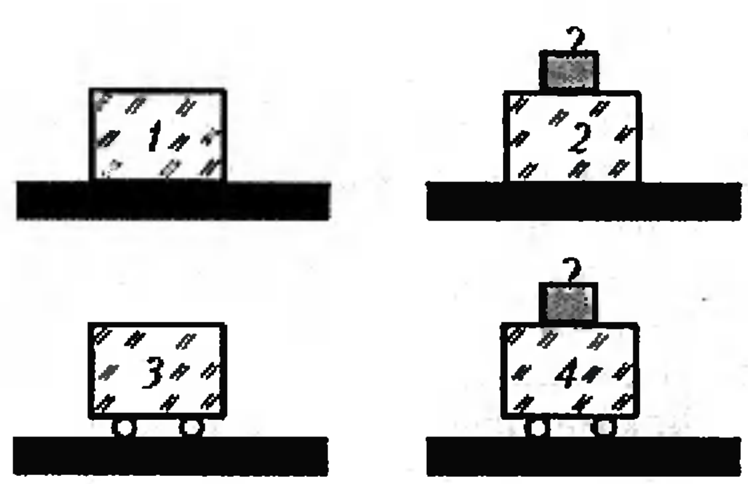


Рис. 1

2. Тело A массой 40 г соединили с телом B массой 80 г и объемом 40 см^3. Оба тела вместе поместили в измерительный цилиндр с водой. При полном погружении в воду тела вытеснили 140 см^3 воды. Определите плотность тела A.

3. Площадь большого поршня гидравлического пресса 1000 см^2, малого 2 см^2. Какая сила действует на большой поршень, если малый испытывает действие силы 200 Н? Трение не учитывать.

4. Почему при открывании крана в трубке (рис.2), из которой откачан воздух, образуется водяной фонтан?

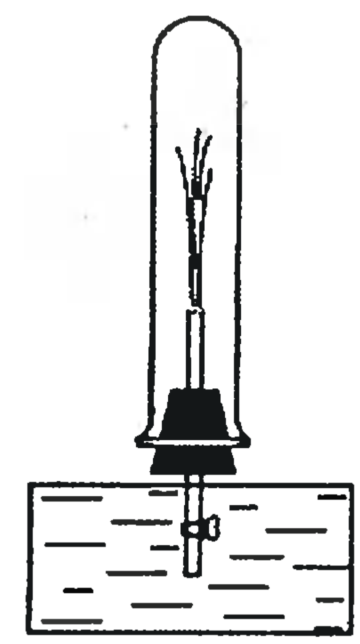


Рис. 2

5. Какую работу нужно совершить, чтобы переместить груз массой 100 кг на расстояние 2 м по совершенно гладкой горизонтальной поверхности?

6. Резиновый шар надули воздухом и завязали. Как изменится объем шара и давление внутри него при повышении атмосферного давления?

[1] *Задачи по физике для 9—11 классов можно найти в «Кванте» №5 за 1996 год или получить по почте, прислав заявку в адрес школы «Авангард».*

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №4)

1. До начала 2000 года останется 2000 часов в 16 часов 9 октября 1999 года.

2. Если обозначить через x_1 ту часть всей работы, которую выполняет в час первый чертенок, а через x_2, x_3 и x_4 — соответствующие доли для остальных чертенят, то из условий задачи можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \dfrac{1}{3}, \\ 2x_1 + \dfrac{x_2}{2} + x_3 + x_4 = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{x_1}{2} + 2x_2 + x_3 + x_4 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Казалось бы, такую систему однозначно разрешить невозможно. Но попробуем. Вычтя из второго и третьего уравнений первое, получим, что $x_1 - \dfrac{x_2}{2} = 0$ и $-\dfrac{x_1}{2} + x_2 = \dfrac{1}{6}$. Отсюда $x_1 = 1/9$, $x_2 = 2/9$. Подставив эти значения в любое из первоначальных уравнений, получим, что $x_3 + x_4 = 0$, т.е. суммарная производительность третьего и четвертого чертенят равна нулю. Это означает, что они попросту ни черта не делали, а значит, отстранение одного из них от работы никак не скажется на времени ее выполнения: первые три чертенка начертили бы чертеж за те же 3 часа.

3. Сумма чисел в k-м уголке равна $2k(1 + 2 + \ldots + k) - k^2 = k^2(k+1) - k^2 = k^3$.

4. Утверждение задачи вытекает из тождества

$$n + (n-1)n(n+1) = n^3.$$

5. Обозначим величину стороны квадрата через a, а расстояние от точки M до точек A и B через x. Тогда (рис.1) высота MN треугольника ABM равна $(a - x)$ и из треугольника AMN по теореме Пифагора получаем, что $x^2 = \dfrac{a^2}{4} + a^2 - 2ax + x^2$, откуда $x = 5a/8$, а $MN = 3a/8$, поэтому площадь треугольника ABM равна $3a^2/16$, т.е. составляет $3/16$ площади всего квадрата.

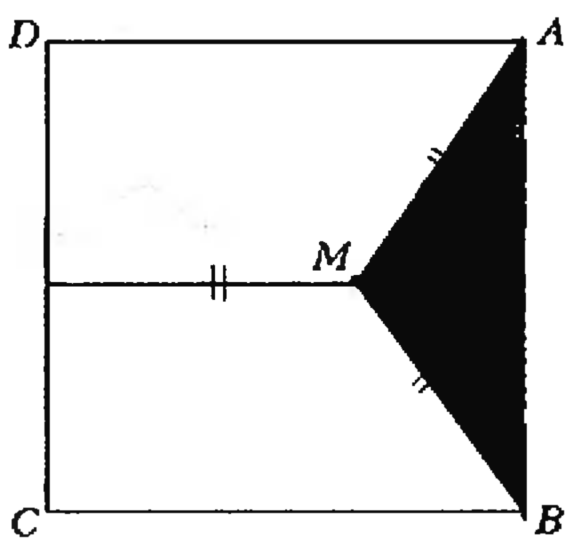


Рис. 1

НА ЧАСОК К СЕМЕЙКЕ РЕПЬЮНИТОВ

1. Суммой девяти одинаковых слагаемых, по-видимому, является репьюнит R_9. Известно, что $R_9 = 111111111 = 3^2 \cdot 37 \cdot 333667$, откуда $R_9 : 9 = 37 \cdot 333667 = 12345679$ — все цифры разные, как и должно быть для расшифровки слова «репьюнит».

Ответ: РЕПЬЮНИТ = 12345679.

2. Поскольку наибольшая цифра палиндрома 5 и занимает среднюю позицию в его записи, то множителем этого палиндрома является R_5. Количество цифр произведения равно 12. Так как $12 + 1 - 5 = 8$, то другой множитель — число R_8.

3. Простые делители репьюнита R_7 — 239 и 4649. Цена нового автомобиля, по-видимому, больше, чем 239 долларов, поэтому фирмой было продано 239 автомашин по цене 4549 долларов за каждую.

4. Квадрат семизначного числа, все цифры которого одинаковы, оказался 13-значным палиндромом с семью различными числами. Таким и должен быть квадрат репьюнита R_7: $1111111^2 = 1234567654321$.

5. В десятичной системе счисления: $R_1 = 1$, $R_{n+1} = 10R_n + 1$.

6. Два репьюнита имеют общий множитель только тогда, когда их номера n имеют общий простой делитель. Поскольку: а) два последовательных числа не имеют общего простого делителя, то R_n и R_{n+1} взаимно просты, б) два последовательных нечетных числа не имеют общего простого делителя, то R_{2n+1} и R_{2n+3} взаимно просты, в) два последовательных четных числа имеют общим простым делителем число 2, то R_{2n} и R_{2n+2} не являются взаимно простыми; их единственным общим простым делителем будет репьюнит $R_2 = 11$.

7. В системе счисления с основанием b репьюнит $R(b,n)$ может быть записан в форме $(b^n - 1)/(b - 1) = b^0 + b + b^2 + \ldots + b^{n-1}$, т.е. представляет собой сумму степеней с показателями степени 0, 1, 2, …, $(n-1)$. Когда b четно, каждое из этих слагаемых, кроме $b^0 = 1$, четно, поэтому все такие репьюниты — нечетные числа. Когда b нечетно, каждая степень числа b нечетна. Тогда, если n нечетно, то репьюнит нечетен, если же n четно, то репьюнит четен. Поэтому репьюнит при нечетном основании будет четен только тогда, когда количество единиц в репьюните четно.

8. При всяком натуральном n справедливо равенство

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{единиц}}2\underbrace{1\ldots11}_{n\ \text{единиц}} = \underbrace{11\ldots11}_{n+1\ \text{единиц}}\underbrace{00\ldots0}_{n\ \text{нулей}} + \underbrace{11\ldots11}_{n+1\ \text{единиц}} = \underbrace{11\ldots11}_{n+1\ \text{единиц}}\cdot\left(10^n + 1\right).$$

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. На Земле пылинки большой массы быстро оседают на ее поверхности, а пылинки малой массы из-за хаотичности движения молекул воздуха могут долго удерживаться во взвешенном состоянии. На Луне же из-за отсутствия атмосферы пылинки любой массы быстро и практически одновременно осаждаются на ее поверхность.

2. Нет. Над влажной почвой парциальное давление водяного пара будет повышенным. Значит (по закону Дальтона), «вклад» давления азота (как и кислорода) должен быть несколько меньшим, чем над сухой почвой.

3. В соответствии с уравнение Менделеева — Клапейрона, любые два из трех параметров — давления, объема и температуры газа — задают его состояние.

4. Уменьшилась.

5. Легкие, а значит, более подвижные молекулы водорода быстрее проникают сквозь перепонку и увеличивают давление в секции с воздухом. По мере проникновения через перепонку воздуха давления в обеих секциях выравниваются.

6. Показания обоих манометров будут несколько большими p из-за добавления аэростатического давления столбов газа. При этом первый манометр покажет меньшее давление, чем второй (так как высоты сосудов различны).

7. И в невесомости сохраняется хаотическое движение молекул газов, составляющих «атмосферу» кабины.

8. Нет. Молекулы, движущиеся вверх после столкновения с полом, замедляют свое движение под действием силы тяжести. Их удары о потолок менее «энергичны», чем о пол.

9. Нет. Для определения давления важно среднее значение кинетической энергии молекул, а оно, при условии теплового равновесия между газом и стенкой сосуда, одно и тоже.

10. Нет. Средние кинетические энергии поступательного движения молекул этих газов действительно равны. Но поскольку азот — двухатомный газ, полная кинетическая энергия его молекул, включающая и энергию вращательного движения, больше, чем у неона.

11. Нет. Уменьшение кинетической энергии молекул у холодной стенки компенсируется увеличением их концентрации и наоборот.

12. Поскольку газ не совершает работы, его внутренняя энергия не изменяется, следовательно, температура останется прежней.

13. В начальный момент падения плотность газа внизу сосуда больше, чем вверху. В состоянии свободного падения молекулы газа равномерно распределятся по всему объему сосуда. Однако их полная кинетическая энергия не изменится, значит, не изменится и температура газа.

14. Вся кинетическая энергия движения газа как целого перейдет во внутреннюю энергию газа и сосуда, т.е. возрастет температура газа, а значит, и его давление.

15. Нет. Температура воздуха определяется не направленной скоростью ветра, а хаотическими движениями, которые молекулы совершают наряду с направленным движением газа как целого и независимо от него.

Микроопыт

Для нашего ощущения совершенно несущественна суммарная внутренняя энергия воздуха в комнате (кстати, она вообще не меняется при протапливании — почему?). Но мы очень чувствительны к температуре, определяемой энергией, приходящейся в среднем на одну молекулу, — а именно она и возросла.

КОРПУСКУЛЯРНЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА

1. $v = 2P\tau/(mc) = 5$ см/с.

2. $F_{ср} = W\sqrt{5-2\sqrt{3}}/(2c\tau) = 0{,}62$ Н.

3. $\varphi_{max} = (hc/\lambda - A)/e = 1{,}74$ В.

4. $\nu = \nu_0(1 + v/c)$.

XXIII ВСЕРОССИЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Зональный этап

8 класс

1. Если рядом с 16 стоит число x, то $16 + 1 \le 16 + x = a^2 \le 16 + 15$, откуда $a^2 = 25$ и $x = 9$. Поэтому у 16 не может быть более одного соседа и удовлетворяющее условию расположение чисел по кругу невозможно. Пример расположения в строку: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.

2. Занумеруем яблоки в порядке неубывания весов и положим в k-й пакет яблоки с номерами k и $301 - k$. Для любых двух пакетов получаем, что в одном из них — яблоки с весами a и d, в другом — с весами c и d, где $a \le b \le c \le d$. Имеем: $a + d \le c + 2b \le 1{,}5c + 1{,}5b$ и $b + c \le 2a + d \le 1{,}5a + 1{,}5d$, что и требовалось.

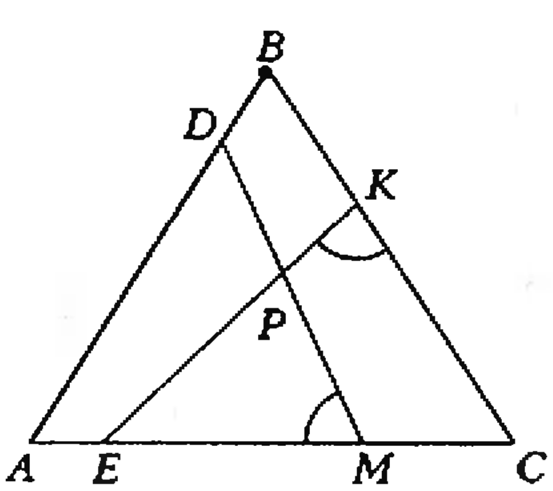


Рис. 2

3. Из условия следует, что $CE = AC - AE = AD$ (рис.2) и, аналогично, $CK = AM$. Отсюда следует, что $\Delta MAD = \Delta ECK$ и, значит, $\angle MPE = 180° - \angle PME - \angle PEM = 180° - \angle PKC - \angle PEC = \angle C = 60°$. Если отрезки DM и EK не пересекаются, то аналогичные рассуждения проводятся для вертикальных углов.

4. Если на предприятии k «верховных» начальников, то каждый работник должен увидеть хотя бы один из k приказов этих начальников. В понедельник их увидели не более $7k$ работников, во вторник — не более $7k \cdot 6$, в среду — не более $7k \cdot 36$ работников. Все, кто увидел эти приказы в четверг, не имеют подчиненных; значит, они все имеют по 7 начальников и количество всех их начальников не более $7k \cdot 36$, т.е. в четверг приказы увидели не более $6k \cdot 36$ работников. Таким образом, $50\,000 \le k + 7k + + 42k + 254k + 216k = 518k$ и $k \ge 97$.

5. Пусть O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Тогда $\angle OAB < 45°$, $\angle OBA < 45°$, поэтому точка O находится внутри K_1, значит, треугольник OAB покрывается квадратом K_1. Аналогично, OBC и OCA покрываются соответственно K_2 и K_3.

6. *Ответ*: 2. Пусть на последнем месте в строке стоит число x. Сумма всех чисел в строке, кроме x, делится на x; но тогда и сумма всех чисел в строке, равная $1 + 2 + \ldots + 37 = 37 \cdot 19$, делится на x. Отсюда $x = 19$, так как 37 уже поставлено на первое место. На третьем месте стоит делитель $37 + 1 = 38 = 19 \cdot 2$, отличный от 1 и 7, которые стоят на других местах.

Примечание. Такое расположение чисел действительно существует: 37, 1, 2, 20, 3, 21, 4, 22, 5, 23, ..., 18, 36, 19. В нем сумма первых $2k$ слагаемых равна $(k+1)\cdot(k+18)$, а числа, стоящие на $(2k + 1)$ и $(2k + 2)$ местах, равны, соответственно, $k + 1$ и $k + 19$.

7. *Ответ*: $p = 7$, $q = 3$. Пусть сначала ни одно из чисел p, q не делится на 3. Если остатки от деления p и q на 3 совпадают, то левая часть делится на 3, а правая — нет. Пусть теперь p делится на 3, тогда $p = 3$. Из равенства $p^3 - q^5 = (p+q)^2 > 0$ следует $p^3 > q^5$ и $q^5 < 27$, что невозможно. Пусть, наконец, q делится на 3, тогда $q = 3$ и $p^3 - 243 = (p+3)^2$, $p(p^2 - p + 6) = 252$, откуда p — простой делитель 252, т.е. 2, 3 или 7. Проверка оставляет только $p = 7$, $(p, q) = (7, 3)$.

8. Обозначим число автомобилей в семье через n. Сумма количеств запрещенных дней по всем машинам, равная $2n$, не превосходит $7 \cdot (n - 10)$, так как в каждый из 7 дней недели снимаются с поездок не более $n - 10$ машин. Итак, $2n \le 7(n - 10)$ и $n \ge 14$. Четырнадцати машин достаточно: запретим четырем машинам понедельник и вторник, четырем — среду и четверг, двум — пятницу и субботу, двум — субботу и воскресенье, двум — пятницу и воскресенье.

9 класс

1. Для любого треугольника данного разбиения окружность, описанная около правильного 1997-угольника, является описанной. Так как центр окружности, описанной около правильного 1997-угольника, не лежит на диагонали, то он попадет внутрь какого-то одного треугольника.

Треугольник остроугольный, если центр описанной окружности лежит внутри, и тупоугольный, если центр описанной окружности лежит вне. Следовательно, треугольник, в который попал центр описанной окружности, остроугольный, все остальные — тупоугольные.

2. *Ответ*: выигрывает партнер игрока, делающего первый ход.

Укажем, как партнер начинающего может гарантировать себе выигрыш. В начале партии он должен стирать числа, кратные 3, до тех пор, пока таковых не останется. Поскольку количество чисел, не превосходит 1000 и кратных 3, равно 333, то партнеру начинающего понадобится не более 333 ходов для того, чтобы ни одно из оставшихся на доске чисел не делилось на 3 (некоторые из чисел, кратных 3, могут быть стерты и начинающим). После этого он делает свои ходы произвольно вплоть до того момента, когда на доске останутся три числа. Каждое из них будет давать остаток 1 и 2 при делении на 3, поэтому среди трех остающихся на доске чисел обязательно найдутся два, дающие одинаковые остатки. Именно их должен оставить партнер начинающего (сумма не будет делиться на 3).

3. Занумеруем яблоки в порядке возрастания веса и разобьем их на пары: в k-ю пару войдут яблоки с номерами k и $301 - k$. Докажем, что веса пар различаются не более чем в 2 раза. Пусть веса яблок a, b, c, d. Имеем: $0 \le a \le b \le c \le d \le 3a$. Тогда $a + d \le 4a \le b + c$, $b + c \le 3a + d \le 2a + 2d$. Проведем с парами яблок ту же процедуру. Аналогично доказывается, что веса четверок яблок различаются не более чем в $3/2$ раза, что и требовалось.

4. Запрещенных «сочетаний цифр» конечное число, следовательно, есть число N такое, что все запрещенные «сочетания цифр» не длиннее N символов. В бесконечной десятичной дроби можно найти два одинаковых куска длины N. Пусть у дроби $a_0, a_1a_2, \ldots$, куски $a_k \ldots a_{k+N-1}$ и $a_l \ldots a_{l+N-1}$ совпали. До-

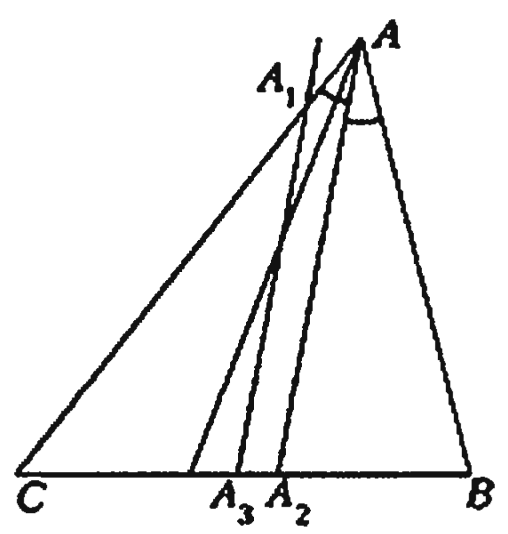


Рис. 3

кажем, что дробь $0, (a_k \ldots a_{l-1})$ удовлетворяет условию. Предположим противное: в этой дроби есть запрещенные «сочетания цифр». Возьмем то, которое встречается самым первым. Очевидно, что хотя бы один символ из данного запрещенного «сочетания цифр» попадет в первый период. Но тогда конец этого «сочетания цифр» и имеет номер не более $l - 1 - k + N$, т.е. оно будет содержаться в куске $a_k \ldots a_{l+N-1}$ исходной дроби.

5. Пусть сумма чисел в наборе равна M, тогда число a из набора заменяется на число $b = M - a$. Просуммируем эти равенства для всех a: $b_1 + \ldots + b_{1997} = 1997M - (a_1 + \ldots + a_{1997})$, откуда $M = 0$, так как $b_1 + \ldots + b_{1997} = a_1 + \ldots + a_{1997} = M$. Значит, для любого a число $b = -a$ также входит в набор и все числа разбиваются на пары a, $-a$. Из нечетности их количества следует, что в набор входит число $a = -a$, т.е. $a = 0$.

7. Пусть биссектриса $\angle A$ пересекает BC в точке A_2, а l_A — в точке A_3 (рис.3). Аналогично определим B_2, B_3, C_2 и C_3. Тогда если $CA_3 \le CA_2$ (другой случай аналогичен), то

$$A_3B = CB - CA_3 = CA_2 + BA_2 - CA_3 = CA_2\left(1 + \frac{AB}{AC}\right) - CA_3$$

по свойству биссектрисы. Тогда по теореме Фалеса

$$A_3B = CA_3\left(\frac{CA_2}{CA_3}\left(1 + \frac{AB}{AC}\right) - 1\right) = CA_3\left(\frac{CA}{CA_1}\left(1 + \frac{AB}{AC}\right) - 1\right) = CA_3,$$

так как, по условию, $AC + AB = 2C_1A_1$. Итак, вершины $\Delta A_3B_3C_3$ — середины сторон ΔABC, поэтому они пересекаются в одной точке.

10 класс

1. В памяти есть число x. Сложением его с самим собой получаем $2x$. Сравниваем эти числа (x и $2x$). Если они равны, то $x \ne 1$, в противном случае найдем корни уравнения

$$y^2 + 2xy + x = 0,\ y_{1,2} = -x \pm \sqrt{x^2 - x}.$$

Если $y_1 \ne y_2$ или корней нет, то $x \ne 1$, в противном случае $x = 1$.

2. Пусть у прямоугольника $ABCD$ точки A, $C \in S_1$, точки B, $D \in S_2$. Пусть точка O — пересечение его диагоналей. Проведем через M и O прямую до следующего пересечения с S_1 и S_2 в точках N_1 и N_2 соответственно. Так как точка O лежит внутри обеих окружностей, то N_1 и N_2 лежат по одну сторону от O. При этом по теореме о хордах $MO \cdot ON_1 = AO \cdot OC = BO \cdot OD = MO \cdot ON_2$, так как $AO = OC = OB = OD$, а значит, $ON_1 = ON_2$ и $N_1 = N_2 = N$. Наоборот, проведя через любую точку O на интервале MN хорды AC и BD в окружностях S_1 и S_2 так, что $AO = OC$, $BO = OD$, получим из теоремы о хордах $AO^2 = MO \cdot ON = BO^2 \Rightarrow AO = OC = BAO = OD \Rightarrow ABCD$ — прямоугольник.

3. Из равенства

$$2^{km} - 1 = (2^m - 1)(2^{m(k-1)} + 2^{m(k-2)} + \ldots + 1)$$

следует, что $2^{km} - 1$ делится на $2^m - 1$, поэтому

$$2^{km+d} - 1 = 2^{km+d} - 2^d + 2^d - 1 = 2^d(2^{km} - 1) + 2^d - 1 \equiv 2^d - 1 (\bmod 2^m - 1).$$

Таким образом, $2^n - 1$ делится на $2^m - 1$ тогда и только тогда, когда n делится на m. Если $n = km$, то

$$\frac{2^{km} - 1}{2^m - 1} = 1 + 2^m + \ldots + 2^{m(k-1)}.$$

Каждое слагаемое дает остаток 1 при делении на $2^m - 1$, поэтому

$$\frac{2^{km} - 1}{2^m - 1} \equiv k (\bmod 2^m - 1).$$

Тогда $k = \frac{n}{m}$ делится на $(2^m - 1)$, что равносильно тому, что n делится на $m(2^m - 1)$.

4. *Ответ*: нельзя. Пусть искомая оклейка существует. Закрасим 27 квадратиков этих трех граней так, как показано на рисунке 4. Тогда любая полоска 3×1 закрывает четное число закрашенных квадратиков. Поэтому оклеить эти грани полосками так, как требуется в условии, не удастся.

5. Как и в задаче 5 для 9 класса, получаем, что числа в наборе разбиваются на пары a, $-a$. Числа различны, поэтому нуль не входит в набор. Значит, среди этих чисел 50 положительных и 50 отрицательных, следовательно, их произведение положительно.

6. *Ответ*: 12. *Указание*. Если число машин равно 11, то заведомо найдется день, когда не смогут выехать 2 машины. Двенадцати машин достаточно (убедитесь в этом).

7. Пусть O_1 — центр описанной окружности, тогда $BO_1 = DO_1 = AO_1$ (рис.5). Углы $\angle DO_2O_1$ и $\angle DAO_1$ равны как вписанные. Далее, $\angle DO_1B$ центральный, а $\angle DAB$ вписан-

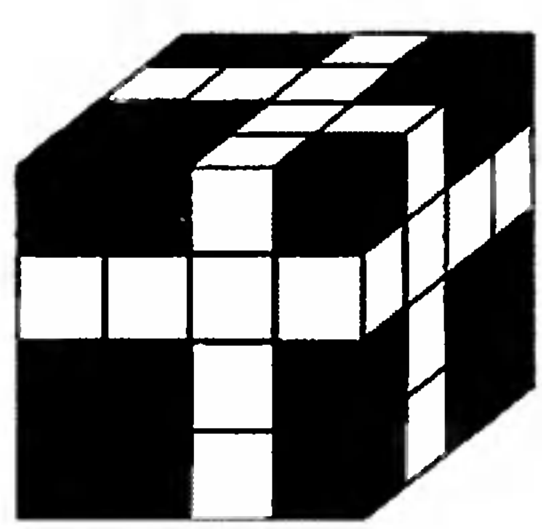


Рис. 4

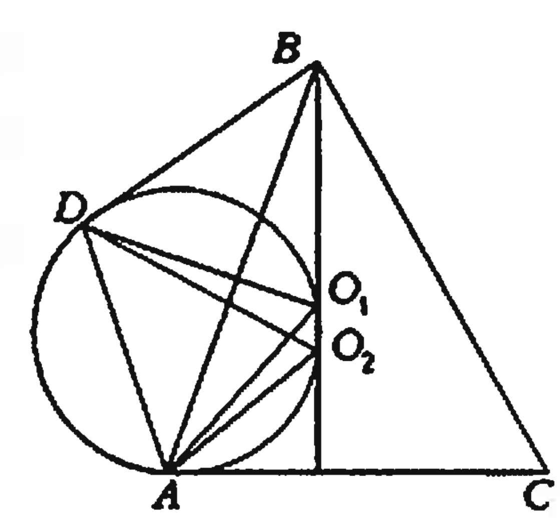


Рис. 5

ный, поэтому $\angle DO_1B = 2\angle DAB$. Для равнобедренного треугольника DO_1B: $\angle DO_1B = \pi - 2\angle BDO_1$. Четырехугольник DO_1O_2A вписанный, поэтому $\angle DO_1O_2 + \angle DAO_2 = \pi$. Из этого следует, что

$$2\angle O_1DB + \angle DAB + \angle O_2AB = \pi .$$

Но O_2 — центр вписанной окружности, следовательно, $\angle O_2AB = \angle O_2AC$. Тогда получаем, что

$$\angle O_1DB + \angle O_2AC = \frac{\pi}{2};$$

$$\begin{aligned}\angle DO_2O_1 &= \angle DAO_1 = \angle DAB + \angle BAO_1 = \\ &= \angle DAB + \frac{\pi}{2} - 2\angle O_2AC = \pi - 2\angle O_2AC - \angle BDO_1 = \\ &= \pi - 2(\angle O_2AC - \angle BDO) + \angle BDO_1 = \angle BDO_1 .\end{aligned}$$

Получим, что $\angle DO_2O_1 = \angle BDO_1$, откуда следует, что BD — касательная.

8. Без ограничения общности можно считать, что $a = 0$, $b, c \ge 0$ и $x \le y \le z$ либо $x \ge y \ge z$. Рассмотрим равенство

$$\sqrt{x} + \sqrt{y+b} + \sqrt{z+c} = \sqrt{x+b} + \sqrt{y+c} + \sqrt{z} . \qquad (1)$$

Вычитая из него $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$, получим после преобразований

$$b\left(\frac{1}{\sqrt{y+b}+\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x+b}+\sqrt{x}}\right) = c\left(\frac{1}{\sqrt{y+c}+\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{z+c}+\sqrt{z}}\right). \qquad (2)$$

Из условий $b, c \ge 0$; $x \le y \le z$ либо $x \ge y \ge z$ получаем четыре возможности:

1) Если $b, c > 0$, то $x = y = z$, что и нужно. Иначе у правой и левой частей равенства (2) разные знаки.
2) Если $b = c = 0$, то $a = b = c = 0$,
3) Если $b = 0$, $c > 0$, то из равенства, аналогичного (1), получим

$$c\left(\frac{1}{\sqrt{x+c}+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y+c}+\sqrt{y}}\right) = 0, \text{ значит, } x = y,$$

а из (2) $y = z$.
4) Если $b > 0$, $c = 0$, то, как и раньше, $x = y = z$.

11 КЛАСС

2. Пусть $M(x_0, y_0)$ — точка пересечения медиан. Прямая $x = x_0$ делит квадрат на две части. В одной из частей находится ровно 1 точка (вершина треугольника). Пусть ее координаты $A(x_1, y_1)$, а двух других — $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Тогда $\vec{AM} = \vec{MB} + \vec{MC}$ и, значит, $|x_0 - x_1| = |x_0 - x_2| + |x_0 - x_3|$. Поэтому после отражения относительно точки M точки B и C перейдут в полосу, ограниченную прямыми $x = x_0$ и $x = x_1$. Проведя аналогичные рассуждения для y, получим, что какие-то 2 точки перешли в полосу, ограниченную прямыми $y = y_0$ и $y = y^*$ (где y^* — координата по y одной из вершин треугольника). Одна из этих точек будет B или C, после отражения относительно M она, как мы доказали, останется внутри квадрата.

3. Пусть таких чисел конечное число, тогда для всех n, начиная с некоторого, $S(3^n) < S(3^{n+1})$. Но 3^n, 3^{n+1} делятся на 9, поэтому $S(3^n)$ и $S(3^{n+1})$ делятся на 9, значит, $S(3^n) \le S(3^{n+1}) - 9$. Тогда $S(3^{N+k}) \ge S(3^N) + 9k > 9k$, значит, число имеет более k знаков: $3^{N+k} > 10^k$. Отсюда при $k = N$ получаем $3^{2N} > 10^N$ — противоречие.

5. Пусть A и B — фракции. Тогда $\overline{A \cup B} = \bar{A}$ — тоже фракция и, значит, $\overline{A \cup B} = A \cup B$ также является фракцией.

6. Поскольку $\log_a b > 1$, то $\log_a \log_a b > \log_b \log_a b$, а так как $\log_c a < 1$, то $\log_c \log_c a > \log_b \log_c a$. Отсюда $\log_a \log_a b + \log_b \log_b c + \log_c \log_c a > \log_b \log_a b + \log_b \log_b c + \log_b \log_c a = \log_b(\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a) = \log_b 1 = 0$.

7. *Ответ*: не существуют. Предположим, что $ABCD$ и $SA_1A_2 \ldots A_n$ такие треугольная и n-угольная пирамиды, что четыре трехгранных угла n-угольной пирамиды с вершинами A_i, A_j, A_k, A_l равны трехгранным углам треугольной пирамиды с вершинами A, B, C и D. Тогда сумма всех плоских углов трехгранных углов с вершинами A_i, A_j, A_k, A_l равна $4 \cdot 180° = 720°$. С другой стороны, по свойству трехгранных углов, $\angle A_{m-1}A_mA_{m+1} < \angle A_{m-1}A_mS + \angle A_{m+1}A_mS$, поэтому $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} + \angle A_{j-1}A_jA_{j+1} + \angle A_{k-1}A_kA_{k+1} + \angle A_{l-1}A_lA_{l+1} < \frac{1}{2} \cdot 720° = 360°$. Но сумма всех углов многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ равна $180° \cdot (n-2)$, поэтому сумма остальных $n - 4$ углов многоугольника больше $180°(n-2) - 360° = 180°(n-4)$, что невозможно, так как многоугольник — выпуклый.

8. Для $\alpha = 1$ — существует: $f(x) = x$. Для $\alpha \ne 1$ для любого x существует y, такое что $y = \alpha(x+y)$: $y = \frac{ax}{1-\alpha}$. Но тогда $f(y) = f(x) + f(y)$, откуда $f(x) = 0$ для любого x.

Заключительный этап

9 класс

2. Пусть O — центр поворота, R — наибольшее из расстояний от точки O до вершин многоугольника, A_1 — одна из вершин, такая, что $OA_1 = R$. Если A_1 переходит при повороте в вершину A_2, A_2 — в A_3, A_3 — в A_4, то, очевидно, $A_1A_2A_3A_4$ — квадрат с центром в точке O.
Если r — наименьшее из расстояний от O до вершин многоугольника, то $r > \frac{R}{\sqrt{2}}$. В самом деле, из выпуклости многоугольника следует, что и любые пять его вершин определяют выпуклый многоугольник. Поэтому внутри и на границе квадрата $A_1A_2A_3A_4$ нет (кроме A_1, A_2, A_3 и A_4) вершин многоугольника, откуда и следует неравенство $r > \frac{R}{\sqrt{2}}$. Теперь в качестве кругов, удовлетворяющих условию, можно взять любые два круга с центром O, радиусы r_1 и R_1 которых таковы, что $\frac{R}{\sqrt{2}} < r_1 < r$ и $R_1 = r_1\sqrt{2}$.
Замечание. Справедливо следующее утверждение: если выпуклый многоугольник M переходит в себя при повороте на угол α ($\alpha < 180°$), то найдутся два круга с отношением радиусов, равным 2, один из которых содержит M, а другой содержится в M. Попробуйте доказать его самостоятельно.

3. Для удобства вместо боковой поверхности параллелепипеда $a \times b \times c$ рассмотрим боковую поверхность цилиндра высотой c и длиной окружности основания $2(a + b)$, разбитую на единичные «квадраты» линиями, параллельными окружностям оснований, и образующими. (Для того чтобы превратить «квадраты» в квадраты, их следует разогнуть.)
Проведем плоскость через ось симметрии цилиндра и через центры единичных «квадратов» в каком-нибудь столбце S шириной 1 и высотой c на поверхности цилиндра. Докажем, что никакая оклейка прямоугольниками, состоящими из четного числа единичных квадратов, удовлетворяющая условию задачи, не симметрична относительно этой плоскости. Действительно, в противном случае столбец S оказался бы покрыт прямоугольниками нечетной ширины. Площадь каждого

из этих прямоугольников четна, а это противоречит нечетности высоты столбца S.

Итак, все способы оклейки можно разбить на пары переходящих друг в руга оклеек (при симметрии относительно указанной плоскости), значит, их число четно.

5. *Ответ*: нет. *Указание.* Если оба уравнения имеют целые корни, то числа b и c не могут быть оба нечетными, а числа $c + 1$ и $b + 1$ обязаны быть четными.

6. Объединим учеников в группы по фамилиям и в группы по именам (возможны группы, состоящие из одного человека — например, ученик без однофамильцев). Каждый войдет в две группы — по фамилии и по имени. Из условия задачи следует, что в классе ровно одиннадцать групп. Действительно, есть группы, состоящие из 1, 2, ..., 11 человек, поэтому групп не меньше одиннадцати, но $1 + 2 + ... + 11 = 66 = 2 \cdot 33$, т.е. мы уже сосчитали каждого ученика дважды, значит, больше групп нет.

Рассмотрим группу из одиннадцати человек (скажем, однофамильцев). Остальных групп, и в частности групп тезок, не более десяти. Потому какие-то двое из одиннадцати входят в одну группу тезок, т.е. у них одинаковы и имя, и фамилия.

7. Пусть прямые AD и AE пересекают прямую BC в точках F и H соответственно (рис.6). Достаточно доказать, что DE — средняя линия треугольника AFH. Треугольник MBN равнобедренный ($BM = BN$) и $MN \| AH$, поэтому $AMNH$ — равнобедренная трапеция, т.е. $NH = AM$. Аналогично доказывается, что $FN = AK$. Так как $AK = AM$, то из полученных равенств следует, что $FN = NH$, т.е. N — середина FH. Тогда D — середина AF, а E — середина AH.

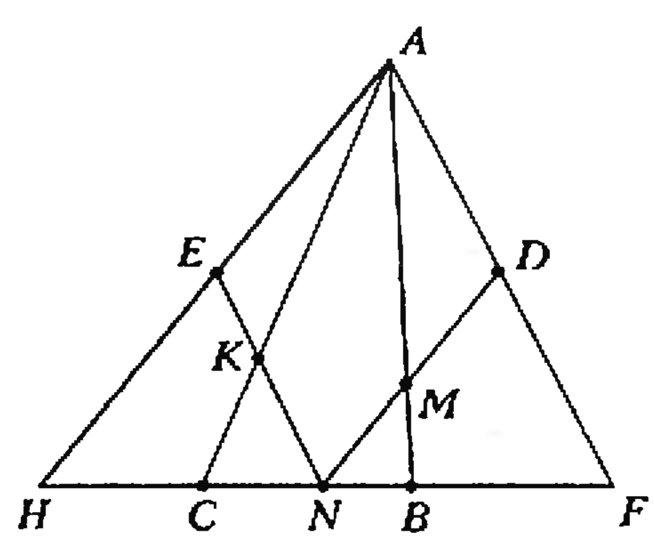


Рис. 6

10 КЛАСС

1. *Ответ*: $(\pm1;0)$, $(\pm4;3)$, $(\pm4;5)$. *Указание.* Поскольку $y \geq 0$, а $\left(y^2 - x^2\right)^2 \geq (2y-1)^2$, имеем $(2y-1)^2 \leq 16 + 1$, откуда $y \leq 5$.

2. Докажем утверждение от противного. Пусть верх квадрата склеен с низом. Возьмем раскраску, противоречащую условию. Будем называть весом линии количество черных клеток на ней. Пусть есть горизонталь веса n. Тогда n вертикалей и n диагоналей каждого направления должны иметь веса 1, 2, ..., n, так как все они пересекают эту горизонталь. Тогда и n горизонталей имеют веса 1, 2, ..., n, так как все они пересекают вертикаль веса n.

Циклически переставим горизонтали так, чтобы нижняя имела вес n (свойства раскраски при этом не изменятся). Пронумеруем горизонтали снизу вверх от 0 до $n - 1$, а вертикали — от 0 до $n - 1$, начиная с вертикали веса n.

Каждая диагональ пересекает по разу горизонталь и вертикаль веса n, поэтому диагонали веса 1 должны проходить через клетку их пересечения — клетку (0, 0). Итак, все клетки (i,i) и $(n - i,i)$, $i > 0$ — пустые.

Если n нечетно, то в каждом столбце, кроме 0, получаем не менее двух пустых клеток, и столбца веса $n - 1$ не найдется. Если $n = 2m$, то столбец m и строка m должны иметь вес $m - 1$ (в них закрашены все клетки, кроме (m,m)). Но тогда мы не сможем найти столбца веса 1.

Если с самого начала отсутствует горизонталь веса n, то есть горизонталь веса 0, и мы можем провести те же рассуждения, поменяв ролями закрашенные и незакрашенные клетки.

4. Лемма. Если $2k$-угольник можно разбить на прямоугольники, то его можно разбить на не более чем $k - 1$ прямоугольник.

Доказательство леммы. Сумма углов многоугольника $S = (2k - 2) \cdot 180°$ и все углы в нем, очевидно, по 90° или по 270°. Если все они по 90°, то это прямоугольник. Пусть найдется угол A в 270°. Продолжим одну из его сторон внутрь многоугольника до пересечения с контуром. Многоугольник разобьется на две части, причем сумма внутренних углов частей не превосходит суммы внутренних углов многоугольника (продолжение стороны отрезает от угла A угол в 90°, который попадает в одну из частей, и угол в 180°, который лежит на стороне другой части и поэтому исчезает; в то же время дополнительно в этих частях могут возникнуть только два угла по 90°, там, где продолжение стороны дошло до контура многоугольника). Заметим, что общее количество углов в 270° уменьшилось. Если они еще остались, будем повторять операцию с частями. В конце мы получим n частей без углов 270°, т.е. n прямоугольников с общей суммой углов $S = 360°n \leq (2k-2) \cdot 180°$, откуда $n \leq k - 1$.

Из леммы следует, что в этом многоугольнике число вершин больше 200, иначе его можно разбить на 99 прямоугольников. Разобьем его на m треугольников и рассмотрим сумму их углов: $S = 180°m$. Найдем теперь S, учитывая, что углы треугольников входят в состав углов многоугольника. Каждый угол многоугольника дает вклад не менее 90° (из угла 270° может быть вычтено 180°, если его вершина лежит на стороне какого-нибудь треугольника), поэтому $S = 180°m > 200 \cdot 90°$, откуда $m > 100$, что и требовалось доказать.

Замечание. Оценка в задаче является точной: объединение клеток квадрата 100×100, кроме клеток, лежащих выше главной диагонали, дает пример многоугольника, который главной диагональю разбивается на 101 треугольник.

5. *Ответ*: не существуют.

Предположим противное. Если у многочлена $kx^2 + lx + m$ с целыми коэффициентами два целых корня x_1 и x_2, то m и l делятся на k, потому что $x_1 x_2 = \frac{m}{k}$, а $x_1 + x_2 = -\frac{l}{k}$. Из чисел a и $a + 1$ одно четное. Без потери общности можно считать, что четное — a. Тогда b и c тоже четные. Отсюда $(b + 1)$ и $(c + 1)$ нечетные. Пусть y_1 и y_2 — целые корни уравнения $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1) = 0$. Тогда $y_1 y_2 = \frac{c+1}{a+1}$ и $y_1 + y_2 = \frac{b+1}{a+1}$ — нечетные числа. Получили противоречие: сумма и произведение двух целых чисел не могут одновременно быть нечетными.

6. Пусть L — точка пересечения прямых KO и MN, а прямая, проходящая через L параллельно AC, пересекает AB и BC в точках A_1 и C_1 соответственно (рис.7).

Покажем, что $A_1L = LC_1$. Действительно, $\angle BA_1L = \angle MOL$ как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Отсюда четырехугольник A_1MLO — вписанный, и $\angle MLA_1 = \angle MOA_1 = \alpha$. Аналогично $\angle C_1LN = \angle C_1ON = \alpha$. Тогда $\Delta OMA_1 = \Delta OC_1N$, откуда $OA_1 = OC_1$. Значит, ΔA_1OC_1

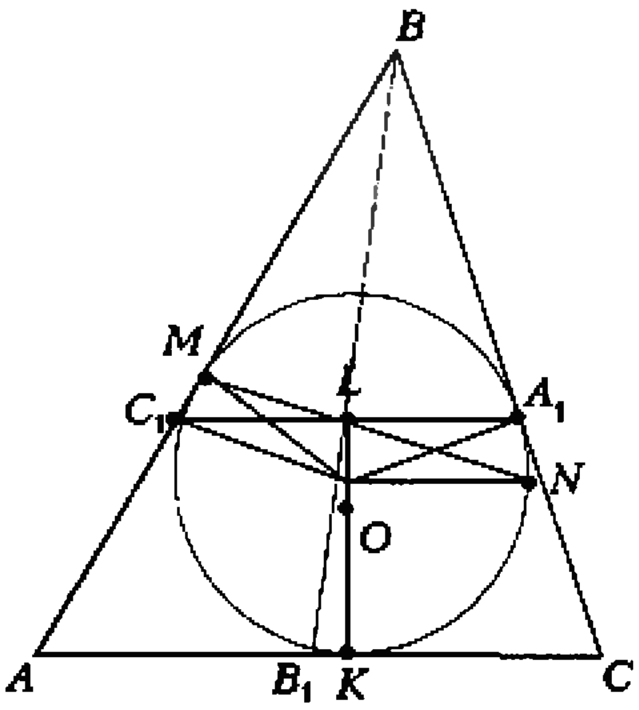


Рис. 7

— равнобедренный, и его высота OK является и медианой. Итак, $A_1L = LC_1$. Но тогда точка L, очевидно, лежит на медиане BB_1, т.е. L совпадает с D из условия задачи.

7. *Ответ*: $m = n = l = 2$. Положим d = НОД(m, n, l). Пусть $m = dm_1$, $n = dn_1$, $l = dl_1$. Тогда $d(m_1+n_1) = d^2d_{mn}^2$, где d_{mn} = НОД(m_1,n_1); отсюда $m_1 + n_1 = d \cdot d_{mn}^2$. Складывая это равенство с двумя аналогичными, получаем:

$$2(m_1+n_1+l_1) = d\cdot d\left(d_{mn}^2+d_{ml}^2+d_{nl}^2\right). \qquad (*)$$

Покажем, что d взаимно просто с суммой $m_1 + n_1 + l_1$. В самом деле, если у d и этой суммы есть общий делитель $d_1 > 1$, то он будет общим делителем всех чисел m_1, n_1 и l_1 (так как сумма любых двух из них делится на d). Но тогда произведение $d \cdot d_1$ — общий делитель чисел m, n и l, что противоречит определению числа d. Следовательно, d является делителем числа 2 (равенство $(*)$), откуда $d \le 2$. Заметим, что числа d_{mn}, d_{ml}, d_{nl} попарно взаимно просты (иначе у чисел m_1, n_1, l_1 нашелся бы общий делитель, не равный 1). Поэтому $m_1 = d_{mn}\cdot d_{ml}\cdot m_2$, $n_1 = d_{mn}\cdot d_{nl}\cdot n_2$, $l_1 = d_{nl}\cdot d_{ml}\cdot l_2$, где m_2, n_2, l_2 — натуральные числа. В таких обозначениях первое из исходных уравнений приобретает такой вид

$$d_{mn}\cdot d_{ml}\cdot m_2 + d_{mn}\cdot d_{nl}\cdot n_2 = d\cdot d_{mn}^2,$$

т.е.

$$d_{ml}\cdot m_2 + d_{nl}\cdot n_2 = d\cdot d_{mn}.$$

Не умаляя общности, мы можем считать, что число d_{mn} — наименьшее из чисел d_{mn}, d_{ml} и d_{nl}. Имеем

$$d_{ml}\cdot m_2 + d_{nl}\cdot n_2 \ge d_{ml} + d_{nl} \ge 2d_{mn} \ge d\cdot d_{mn}$$

(так как $d \le 2$). Итак, все неравенства являются на самом деле равенствами, отсюда $m_2 = n_2 = 1$, $d = 2$ и $d_{ml} = d_{mn} = d_{nl}$. Но числа d_{mn}, d_{ml}, d_{nl} попарно взаимно просты, следовательно, они равны 1, и мы нашли единственное решение $m = n = l = 2$.

11 класс

4. Пусть PQ — любое горизонтальное ребро одного из кубиков. Обозначим через C_{PQ} вертикально расположенный прямоугольник, нижняя сторона которого — PQ, а верхняя лежит на поверхности куба. Пусть n_{PQ} — число пересечений данной ломаной с прямоугольником C_{PQ}. Ребро PQ покрасим в белый цвет, если n_{PQ} — четно, в черный, если n_{PQ} — нечетно. Все остальные, т.е. вертикальные, ребра кубиков покрасим в белый цвет. Докажем теперь, что приведенная раскраска удовлетворяет условию задачи. Пусть $PQRS$ — вертикальная грань и PQ и RS — ее горизонтальные ребра.

Если ломаная не пересекает $PQRS$, то прямоугольники C_{PQ} и C_{RS} пересекаются с ломаной в одних и тех же точках. Поэтому ребра PQ и RS покрашены в один цвет и, следовательно, эта грань удовлетворяет требованию задачи. Если же ломаная пересекает прямоугольник $PQRS$, то n_{PQ} и n_{RS} отличаются на 1 и, следовательно, имеют разную четность. Поэтому ребра PQ и RS покрашены в разные цвета, что означает выполнение условия задачи и в этом случае.

Пусть теперь $PQRS$ — горизотальная грань. Объединение прямоугольников C_{PQ}, C_{QR}, C_{RS} и C_{SP} есть боковая поверхность параллелепипеда, состоящего из кубиков, расположенных в точности над гранью $PQRS$. Замкнутая ломаная пересекает поверхность параллелепипеда четное число раз (сколько раз ломаная «заходит» внутрь параллелепипеда, столько раз она и «выходит» из него).

Заметим, что ломаная не пересекает верхнюю грань параллелепипеда. Если грань $PQRS$ не отмечена, то ломаная не пересекает ее. Тогда все точки пересечения ломаной с поверхностью параллелепипеда расположены на его боковой поверхности. В этом случае сумма $n_{PQ} + n_{QR} + n_{RS} + n_{SP}$ четна. Если же грань $PQRS$ отмечена, то одна из точек пересечения ломаной с поверхностью параллелепипеда принадлежит $PQRS$. Тогда сумма $n_{PQ} + n_{QR} + n_{RS} + n_{SP}$ нечетна, и следовательно, нечетное число сторон грани $PQRS$ окрашено в черный цвет.

5. Пусть $m \le n$ — целые корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$. Тогда из $m + n = -a$, $mn = b$ следует, что m, $n < 0$, $1 \le |n| \le |m| \le 1997$, $0 < mn \le 1997$. Рассмотрим уравнение $x^2 - nx + mn = 0$. Его коэффициенты — целые числа от 1 до 1997, и оно не имеет корней, так как $D = n^2 - 4mn = n(n - 4m) < 0$.

Итак, среди рассматриваемых уравнений любому уравнению с целыми корнями можно поставить в соответствие единственное уравнение, не имеющее корней. Кроме того, все квадратные трехчлены $x^2 + cx + d$, где c — четно, d — нечетно, $D < 0$, не представимы в виде $x^2 - nx + mn$. Значит, уравнений, не имеющих корней, больше.

6. Для каждой из вершин многоугольника, лежащих по одну сторону от l, отметим отрезок, высекаемый на l продолжениями выходящих из нее сторон. Тогда условие задачи означает, что точка P лежит внутри многоугольника тогда и только тогда, когда она принадлежит нечетному числу отмеченных отрезков. Но каждая из точек пересечения l со сторонами многоугольника будет концом ровно одного из отмеченных отрезков, а каждая из точек пересечения l с продолжением стороны многоугольника — концом ровно двух отмеченных отрезков.

Следовательно, при движении точки P по прямой l четность количества содержащих ее отмеченных отрезков изменяется при каждом пересечении границы многоугольника. Отсюда и следует утверждение задачи.

7. Пусть O — центр сферы, O_1 — точка пересечения биссектрис ΔABC, H — ортоцентр ΔACD, M — точка пересечения медиан ΔABD и O_1, H, M — точки касания (рис.8).

Точка O_1 — центр окружности, вписанной в ΔABC. Пусть эта окружность касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Тогда $O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1$, следовательно, прямоугольные треугольники OO_1A_1, OO_1B_1, OO_1C_1 равны, откуда $\angle OA_1O_1 + \angle OB_1O_1 + \angle OC_1O_1 = \varphi$. Кроме того, $O_1A_1 \perp BC$, поэтому по теореме о трех перпендикулярах $OA_1 \perp BC$, т.е. φ — линейный угол двугранного угла с гранями BOC и BO_1C. С другой стороны, BOC — биссектор двугранного угла с гранями BDC и BAC (O — центр вписанной сферы), поэтому угол межу гранями BDC и ABC равен 2φ. Аналогично, грани ADC и ADB наклонены к основанию

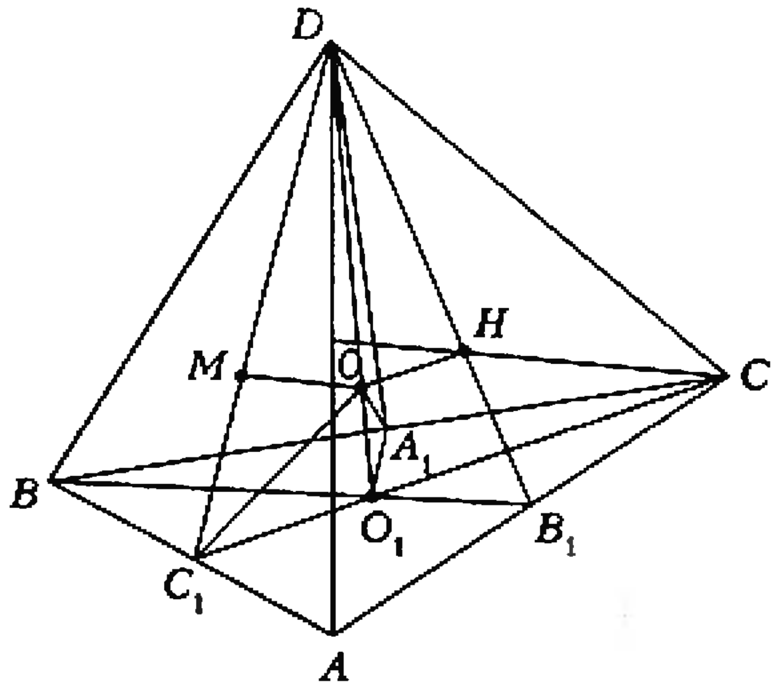


Рис. 8

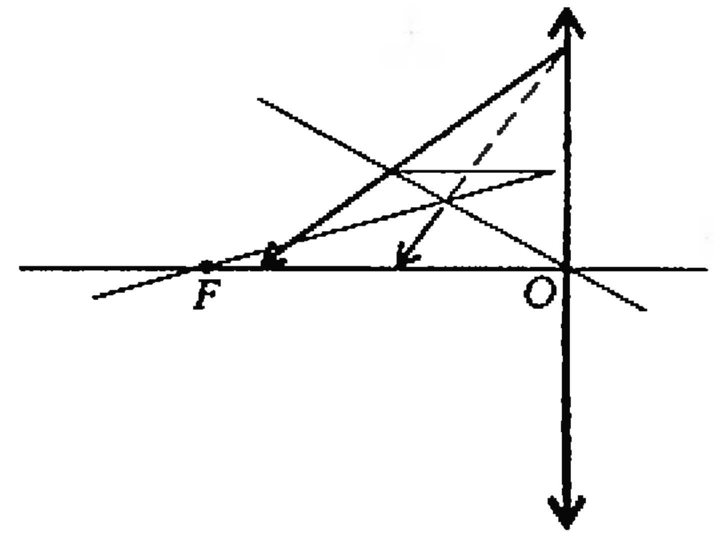


Рис. 9

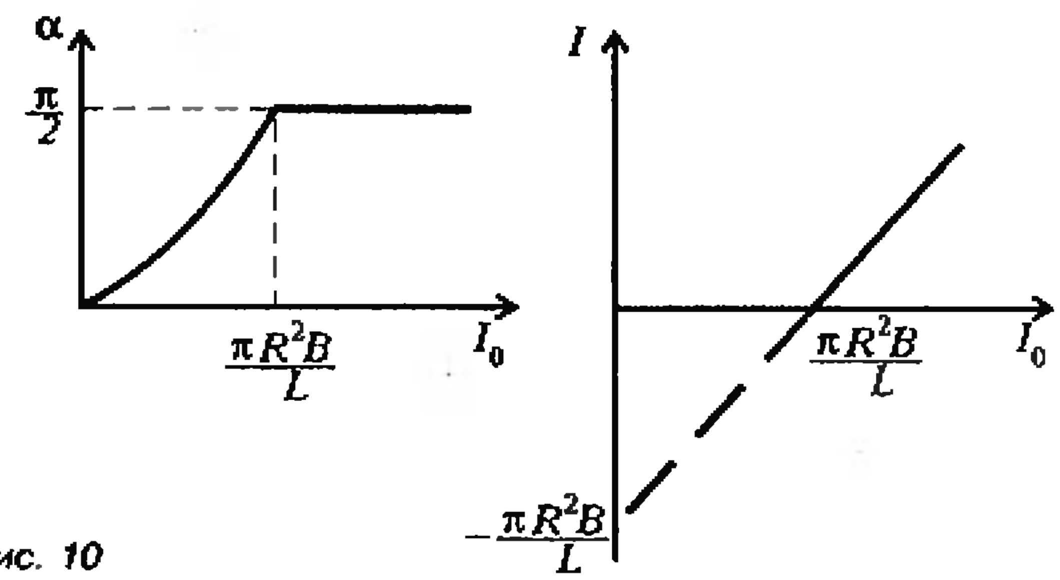


Рис. 10

ABC под углом 2φ. Отсюда следует, что проекция O' точки D на плоскость ABC равноудалена от AB, BC и CA и, учитывая то, что точки O' и C лежат по одну сторону от AB, O' и B — от AC, O' и A — от BC, получаем, что $O' = O_1$, т.е. DO_1 — высота тетраэдра.

Поскольку $AB \perp O_1C_1$ и $AB \perp DO_1$, то $AB \perp DO_1C_1$. Опустим из точки O перпендикуляры OH_1 и OM_1 на DB_1 и DC_1. Тогда $OH_1 \perp ADC$, так как $OH_1 \perp DB_1$ и $OH_1 \perp AC$ ($AC \perp DO_1B_1$). Значит, $H_1 = H$, т.е. $H \in DB_1$. Аналогично, $OM_1 \perp ADB$, т.е. $M_1 = M$ и, значит, $M \in DC_1$. Итак, прямая DM — одновременно медиана и высота ΔADB, значит, $AD = DB$. Тогда $AO_1 = BO_1$, следовательно, $AC = BC$ и точки C, O_1, C_1 лежат на одной прямой.

По теореме о трех перпендикулярах $CO \perp AD$ ($OH \perp ADC$ и $CH \perp AD$), кроме того, $CO \perp AB$ ($AB \perp CDC_1$), поэтому $CO \perp ADB$. Но $OM \perp ADB$, значит, точка O лежит на CM. Отсюда следует, что M — центр окружности, вписанной в ΔADB (основание конуса с вершиной C, описанного около сферы, — вписанная в ΔADB окружность). Рассмотрим ΔCDC_1. В нем DO_1 и CM — высоты, C_1O — биссектриса, значит, $C_1D = C_1C$, откуда $C_1O_1 : O_1C = C_1M : MD = 1 : 2$. Центры вписанных окружностей ΔABC и ΔADB являются точками пересечения медиан, поэтому ΔABC и ΔADB — равносторонние.

Отсюда, учитывая то, что высота пирамиды попадает в центр основания ABC, получаем, что тетраэдр — правильный.

XXXI ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Теоретический тур

9 класс

1. $u > \sqrt{v_0^2 - 2gH}$. **2.** $l = v_0^2/(6\mu g)$. **3.** $\tau = 42$ с.

4. В зависимости от порядка включения резисторов в цепь амперметр A_1 будет показывать либо 4,8 А, либо 5 А.

10 класс

1. 1) $r = r_0 + mg/\left(4\pi^2 k\,\mathrm{tg}\alpha\right)$; 2) $\omega = \pi\sqrt{2k/m}$.

2. Сила натяжения максимальна в точке A и равна

$$T_{max} = mg\left(H^2 + l^2\right)/(2HL).$$

3. 1) $x \approx 0{,}45\%$; 2) $\rho_1/\rho_2 \approx 2{,}9$.

4. $r_0 = \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + Rr}$, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}r_0/r$.

5. 1), 2) См. рис.9; 3) если предметом является маленькая стрелка, то линза собирающая, а если большая — то рассеивающая.

11 класс

1. 1) $\Delta x = \Delta x_0/2$;

2) $T = 2\pi\sqrt{(m + M/3)\Delta x_0/(Mg)}$.

2. 1) Шарик *1* окажется на оси вращения, шарик *2* останется на своем месте, а шарик *3* упрется в боковую стенку цилиндра;

2) $F_1 = 4\pi\rho_0 r^3 g/3$, $F_2 = 4\pi\rho_0 r^3\sqrt{g^2 + \omega^4 R^2/4}\,/3$,

$F_3 = 4\pi\rho_0 r^3\sqrt{g^2 + \omega^4 R^2}\,/3$.

3. 1), 2) См. рис.10;

3) $A = \pi R^2 B\left(I_0 - \pi R^2 B/(2L)\right) + 2MgR$.

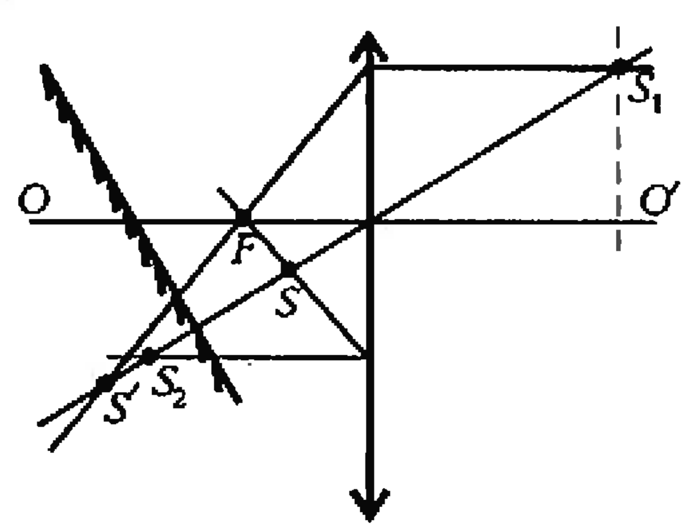


Рис. 11

4. 1) $U_0 = \sqrt{2Mgd^2/(\varepsilon_0 S)}$; 2) $v = \sqrt{2gd}$.

5. См. рис.11.

ПЕРВЫЕ МЕЖДУНАРОДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОРЕВНОВАНИЯ САМАНЙОЛУ КОЛЛЕДЖА В ТУРЦИИ

1. Разобьем числа 1, 2,..., 1996 на пары: {1; 1996}, {2; 1995}, ..., {998; 999}. Сумма чисел в каждой такой паре равна 1997, при этом найдется по крайней мере n пар таких, что оба числа пары принадлежат выбранному множеству. Сумма всех чисел из этих пар равна $1997n$.

2. Возможны два случая расположения точки P на прямой AC. Рассмотрим первый случай, когда P лежит на стороне

AC (рис. 12). Второй случай, когда P лежит на продолжении стороны AC, рассматривается аналогично.

Через точку K проведем прямую LM, параллельную BC, так, что точка L лежит на AC, а M — на AB. Получающиеся четырехугольники $OLPK$ и $OKMB$ — вписанные. Действительно, у первого из них есть прямые углы OKL и OPL, а у второго — прямые углы OKM и OBM.

Из того, что $OLPK$ — вписанный, получаем равенство углов OLK и OPK; а из четырехугольника $OKMB$ — равенство $\angle OMK = \angle OBK$. Кроме того, треугольник OBP — равнобедренный, откуда $\angle OPK = \angle OBK$.

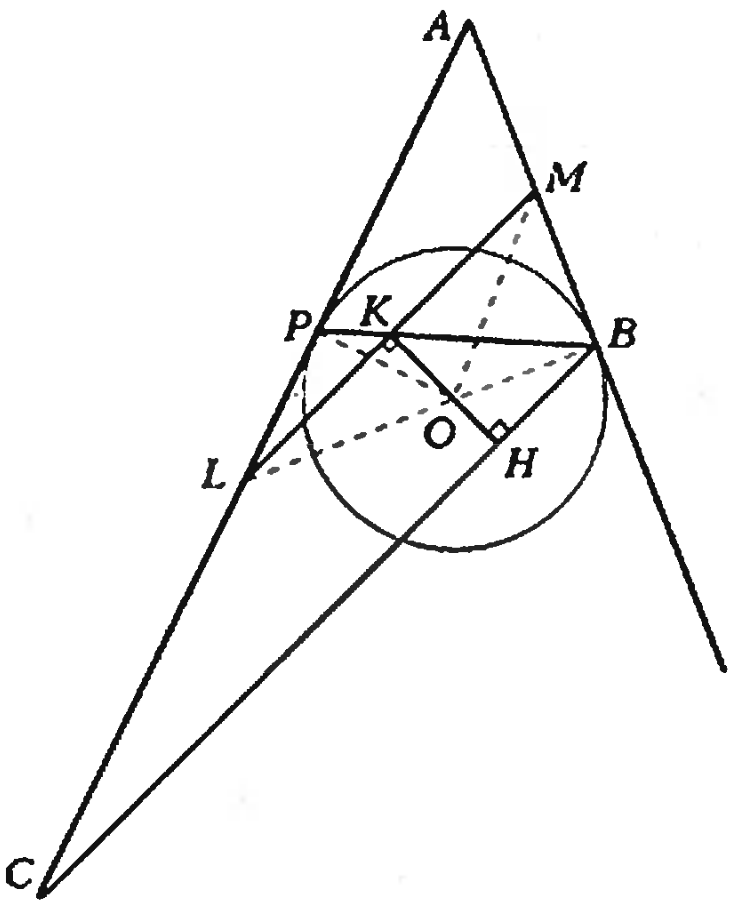


Рис. 12

Запишем цепочку равенств

$$\angle OLK = \angle OPK = \angle OBK = \angle OMK,$$

из которой следует, что треугольник OLM — равнобедренный. Следовательно, перпендикуляр OK делит сторону LM пополам и для треугольника ALM прямая AK является медианой. В силу подобия треугольников ALM и ACB получаем, что AK является медианой для ACB и делит CB пополам.

3. $x \in \left[2-\frac{1}{n};2\right)$. *Указание.* Рассмотрите 5 случаев: $x \le 0$; $0 < x < 1$; $1 \le x < 2-\frac{1}{n}$; $2-\frac{1}{n} \le x < 2$; $x \ge 2$.

4. Максимум расстояния MN достигается, когда эти точки расположены в вершинах квадрата, минимум — когда они на серединах ребер. *Указание.* Воспользуйтесь методом координат.

5. а) Треугольники AB_2C и ABC_2 — равнобедренные (рис.13) по условию задачи, и у них равны углы при вершине A. Следовательно, эти треугольники подобны. Совершим поворот относительно точки A на 90° так, чтобы прямая AC_2 перешла в прямую AC, а прямая AB — в прямую AB_2. При этом образ прямой C_2B окажется параллельным прямой CB_2. Следовательно, прямые C_2B и CB_2 были перпендикулярны.

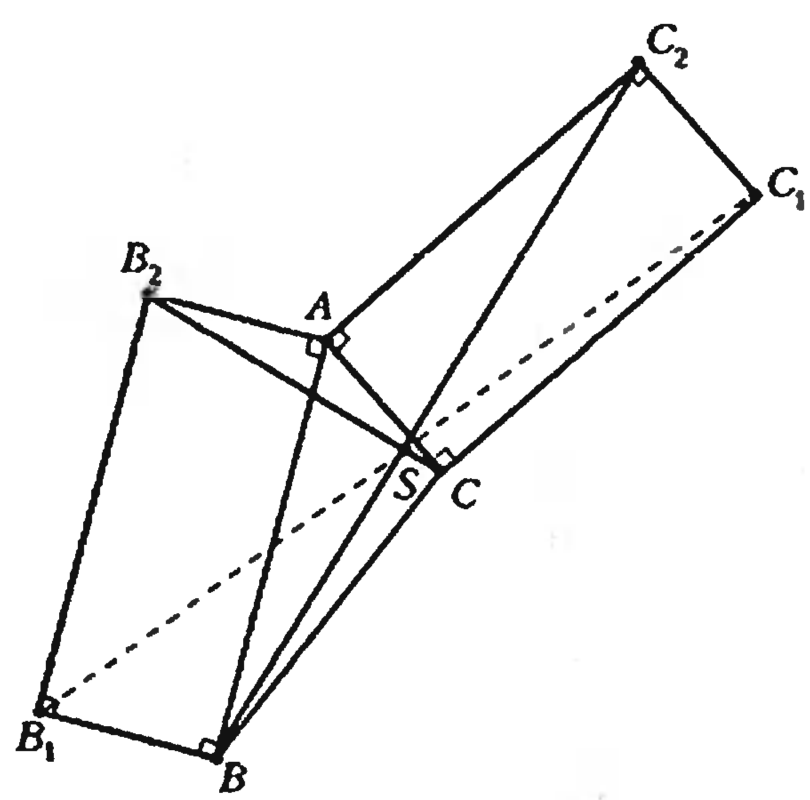


Рис. 13

б) Углы B_2SB и B_2B_1B — прямые, поэтому точки B_2, S, B, B_1 лежат на одной окружности и $\angle B_1SB = \angle B_1B_2B$. Аналогично, точки S, C_2, C_1, C также лежат на одной окружности и $\angle C_1SC_2 = \angle C_1CC_2$. Прямоугольники ABB_1B_2 и ACC_1C_2 одинаковы, поэтому $\angle B_1B_2B = \angle C_1CC_2$. Выписав вместе все полученные равенства

$$\angle B_1SB = \angle B_1B_2B = \angle C_1CC_2 = \angle C_1SC_2,$$

по теореме о вертикальных углах получаем, что точка S лежит на прямой B_1C_1.

6. а) Все числа вида n^4, $n \in N$ являются квадратично совершенными.

б) Легко убедиться, что

$$\underbrace{8^2+8^2+\ldots+8^2}_{16\text{ раз}}+\underbrace{6^2+6^2+\ldots+6^2}_{27\text{ раз}} =$$

$$= 16\times 64+27\times 36 = 1024+972 = 1996,$$

$$\underbrace{\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{8^2}}_{16\text{ раз}}+\underbrace{\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{6^2}}_{27\text{ раз}} = \frac{16}{64}+\frac{27}{36} = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1.$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

А.Н.Балдин, В.Н.Власов, В.А.Иванюк, А.Е.Пацхверия, М.М.Константинова, Д.Н.Гришукова, П.И.Чернуский, С.Б.Шехов

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Осипова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

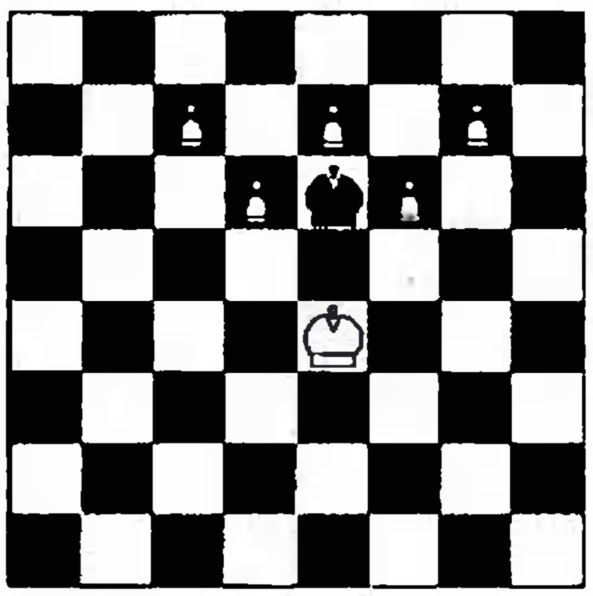
Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ № 1352

МНОГОЛИКАЯ СИММЕТРИЯ

В шахматных задачах важна не только сложность решения, но и внешняя привлекательность, выразительность. Нередко составители задач обращаются к каким-нибудь геометрическим формам, сразу привлекая внимание решателей. Одной из самых популярных тем такого рода является симметрия. Вернемся еще раз к этой занятной идее, которой мы посвящали немало места и раньше.

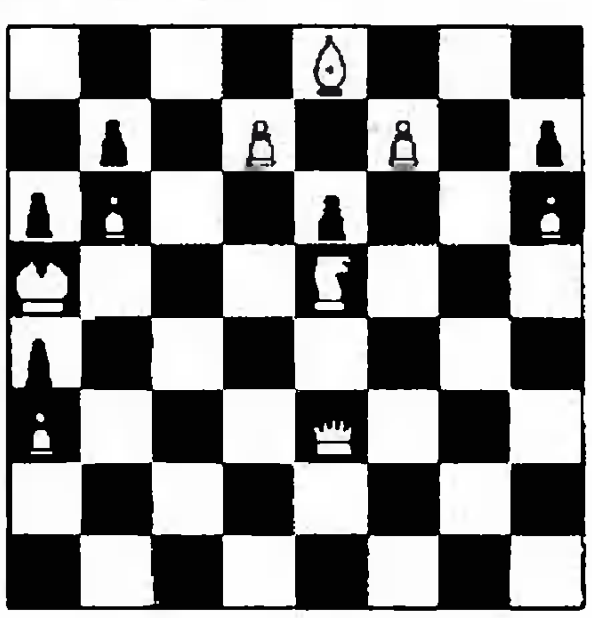


Ф.Хоффман, 1902
Мат в 3 хода

Классическая миниатюра, которая лет тридцать назад была пробным камнем для шахматных программ на ЭВМ. Если машина справлялась с задачей, то получала высокую оценку... Три белые пешки на пороге своего превращения в ферзи, но ни одна из них ферзем не станет!

1. e8С! Кр:d6 2. c8Л! Крe6 3. Лc6× или **1...Кр:f6 2. g8Л! Крe6 3. Лg6×.**

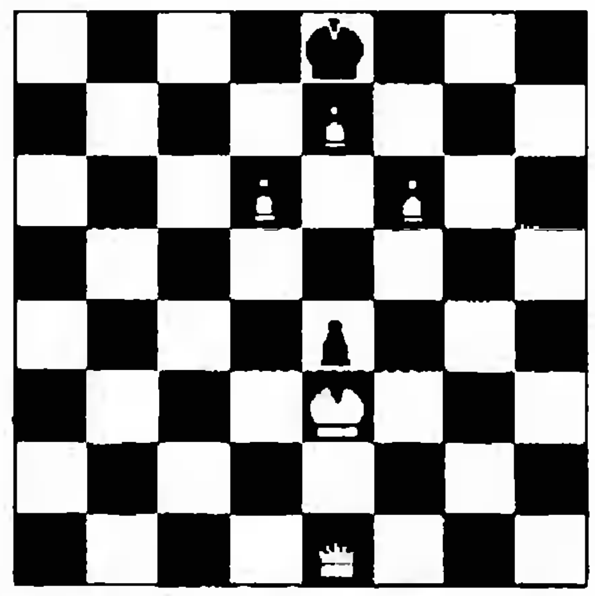
Забавно, что в некоторых задачных замыслах на тему симметрии никак не удается пристроить белого короля. Для реализации авторской мысли он совсем не нужен, и, чтобы он не мешал, приходится сооружать для его величества надежную крепость.



Я.Кишш, 1942
Мат в 2 хода

Хорошо бы отрезать линию «а» от доски, тогда получилась бы идеальная симметрия. В начальной позиции на любой из четырех ходов черного короля следует мат: **1... Крd8, Крd6, Крf8, Крf6** и, соответственно, 2. Фg5, d8Ф, Фc5, f8Ф×. Однако ни одного из этих матов мы не увидим, такая тема называется иллюзорной игрой. После выжидательного **1. Фe4!** четыре знакомых нам хода короля ведут к совсем другим матам – **2. Фh4, f8Ф, Фb4, d8Ф×**. Вступление к двухходовке, как и полагается, единственное, поскольку белый король неподвижен: 1. Кр:a4 a5, 1. Крb4 a5+.

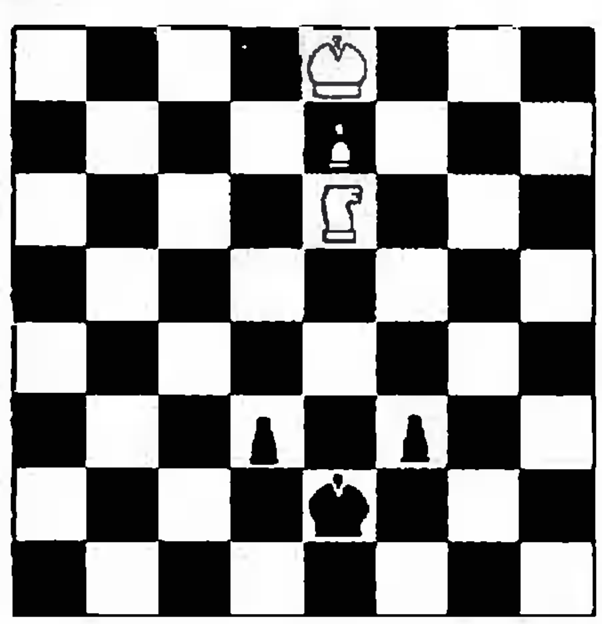
В предыдущей задаче первый ход сохранил симметрию (линия «а» не в счет), а в следующей он, наоборот, вносит диссонанс (правда, затем все возвращается на круги своя).



Л.Куббель, 1928
Мат в 3 хода

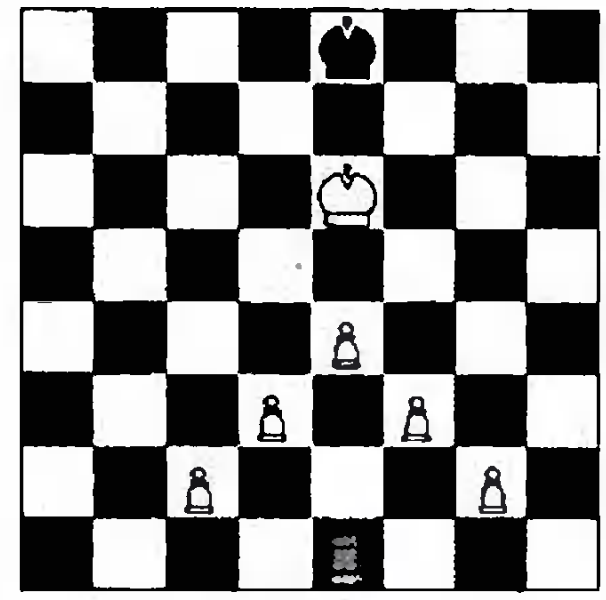
1. Фa5! Крd7 2. Фd5! Крe8 3. d7× (2...Крc8 3. e8Ф×) или **1...Крf7 2. Фf5! Крe8 3. f7×** (2...Крg8 3. e8Ф×). В данном случае линия «а» играет совсем другую роль: при симметричном построении решает асимметричная игра: на королевском фланге у белого ферзя отсутствует поле, симметричное полю a5, и поэтому решение единственное.

Замыслы, связанные с асимметричным решением симметричных позиций пользуются большой популярностью, особенно плодотворно потрудились классики необычной композиции Доусон и Паули.



Т.Доусон, 1924
Выигрыш

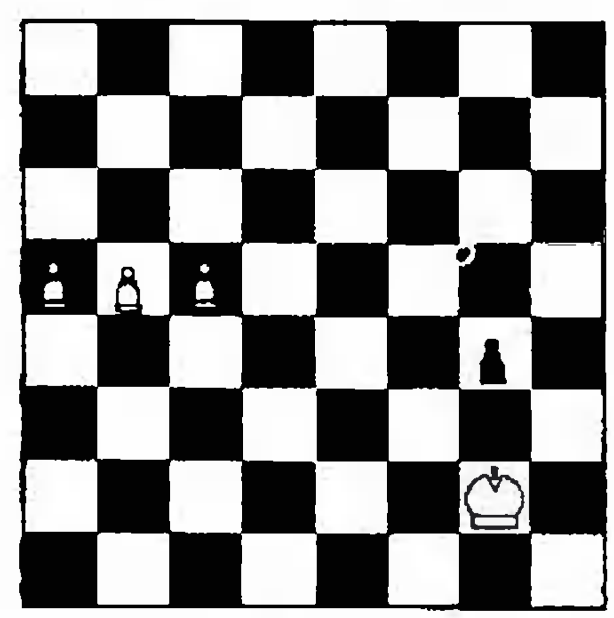
1. Кd4+ Крe3 2. К:f3 Кр:f3 3. Крf8 d2 4. e8Ф d1Ф 5. Фh5+ и **6. Ф:d1.** Но почему не проходит аналогичное 1. Кf4+ Крe3 2. К:d3 Кр:d3 3. Крd8 f2 4. e8Ф f1Ф 5. Фb5+? Дело в том, что черные в этом случае последним ходом не ставят ферзя, а играют 4...Крd2! с теоретической ничьей – черный король находит патовое пристанище на поле h1.



В.Паули, 1914
Мат в 5 ходов

1. Лb1! Крd8 2. d4 Крc7 3. Крe7 Крc6 4. Крd8 Крd6 5. Лb6× или **1...Крf8 2. Лb7 Крg8 3. Крf6 Крh8 4. Крg6 Крg8 5. Лb8×.** Но геометрию разрушает 1. Лh1? Крd8 2. Лh7 Крc8 3. Крd6 Крb8, и на другой стороне доски черный король убегает.

И в заключение еще один вид симметрии.



И.Крейчик, 1953
Выигрыш

После **1. Крg1!** возникает центральная симметрия, и возможности сторон, как будто, одинаковые. Но все решает очередь хода. В цугцванге оказались черные.

1...Крb7 2. b6! Но не 2. c6+? Крc7 3. Крg2 g3 4. a6 Крb6.

2...f3 3. Крf2 h3 4. Крg3. Черные пешки заблокированы и гибнут, белые же пешки спокойно идут вперед. Кстати, поспешно было бы 1. c6? h3+ 2. Крh2 Крc7 3. a6 Крb6, и верх берут черные.

Е.Гик

Индекс 70465

ИГРУШКИ ПО ФИЗИКЕ

И ОПЯТЬ ПОПЛАВОК В БУТЫЛКЕ

Налейте в бутылку воду (не до самого верха), поместите туда маленькое тело, которое плавает на поверхности («поплавок»), а бутылку наглухо закройте. Можно ли теперь, не открывая бутылку, заставить поплавок опуститься на дно?

Оказывается, можно. Только для этого нужны, во-первых, специальная бутылка, а во-вторых, специальный поплавок. С бутылкой все просто – возьмите не стеклянную, а мягкую пластиковую. Сжимая такую бутылку руками, мы сможем увеличивать давление внутри, не нагревая сосуд и не накачивая в него воздух насосом. Однако увеличение давления не приведет ни к каким видимым глазом эффектам, если поплавок будет представлять собой обычное сплошное тело, например – деревянный шарик. Мало того, на первый взгляд, увеличение давления может даже привести к обратному эффекту – небольшому уменьшению глубины погружения поплавка. В самом деле, сила тяжести поплавка уравновешивается выталкивающей силой не только со стороны воды, но и со стороны воздуха. Сжимая сосуд, мы увеличиваем вес вытесненного поплавком воздуха, значит, должен немного уменьшиться вес вытесненной воды. Как же пересилить этот эффект и заставить поплавок, наоборот, сильнее погрузиться?

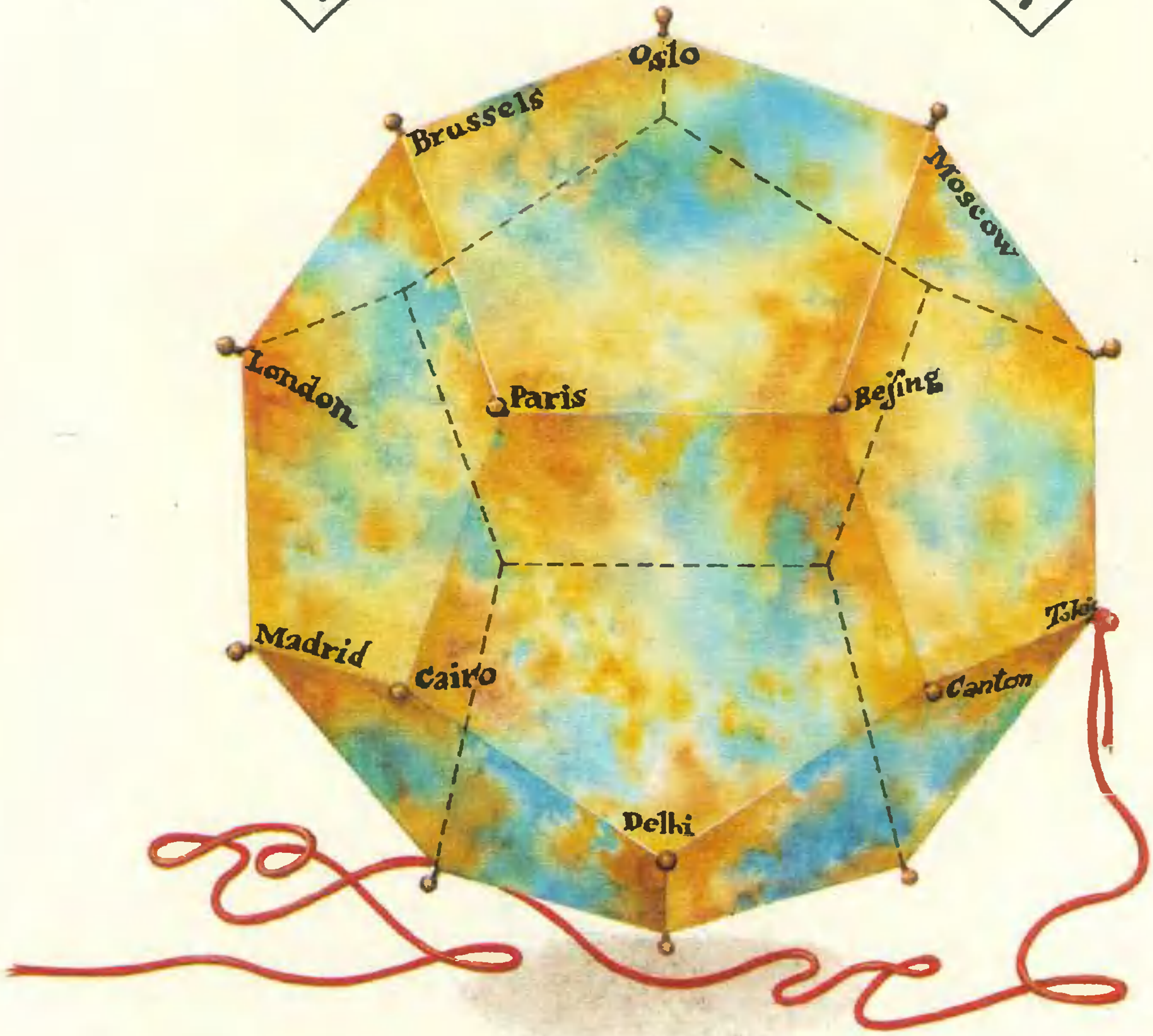
Этого можно добиться, создав поплавок, объем которого заметно уменьшается при увеличении внешнего давления. Тогда он будет погружаться сильнее и может даже утонуть. Но из чего же сделать такой поплавок? Где взять материал, обладающий такой сильной сжимаемостью? Очень просто — поплавок надо сделать... из воздуха.

Представьте себе полое тело с отверстием, плавающее отверстием вниз. При увеличении давления в бутылке воздух сжимается, вода заходит внутрь поплавка, и его «объем» уменьшается. Если подобрать вес поплавка так, чтобы в обычном состоянии над водой выступала его малая часть, то при соответствующем увеличении давления поплавок утонет. Уменьшили давление рук на бутылку – и он послушно всплывает.

В качестве такого поплавка проще всего взять обычную медицинскую пипетку. Начальную глубину погружения плавающей пипетки легко отрегулировать, набрав в нее немного воды (надо, чтобы верх пипетки выступал на 2–3 мм). Сжимая бутылку все сильнее, понаблюдайте за уровнем воды в пипетке – хорошо видно, как он поднимается. А еще лучше – поместите в бутылку несколько пипеток, покрасив их в разные цвета и отрегулировав их на разные давления. Сжимаете бутылку – пипетки тонут одна за другой, отпускаете – они всплывают в обратом порядке.

Напоследок отметим, что «тонущие поплавки» придуманы очень давно, авторство приписывают Декарту и поэтому называют их «картезианскими водолазиками».

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК



ГОЛОВОЛОМКА ГАМИЛЬТОНА

Уильям Роуан Гамильтон (1805–1865) — известный математик, президент Ирландской академии наук, изобретатель кватернионов, в 1859 году выпустил в продажу эту головоломку. Основной частью головоломки являлся деревянный додекаэдр. В его вершинах были вбиты гвоздики, к одному из которых была привязана веревочка. Задача состояла в том, чтобы, зацепляя веревочку за гвоздики, обойти по одному разу все вершины, проходя по ребрам додекаэдра.

На гранях додекаэдра около вершин были написаны названия крупнейших городов мира — Дели, Брюссель, Кантон... Головоломка не имела того успеха, который выпал на долю «Кубика Рубика», и вскоре была забыта всеми, кроме математиков, которые назвали замкнутый путь в графе, проходящий по одному разу через все вершины графа, гамильтоновым циклом. Обобщением этой задачи стала задача о бродячем торговце, в которой для каждого ребра задано число — расстояние между соединяемыми вершинами. Требуется найти гамильтонов цикл, для которого суммарное пройденное расстояние будет наименьшим.

А. Савин